Almen Matematisk Dannelse

af **De Studerende**
ved kurset
Almen Matematisk Dannelse
Foråret 2002

Matematisk Afdeling KU
Foråret 2002

Indledning

Disse noter er skrevet af de studerende på et kursus med titlen “Almen Matematisk Dannelse” som jeg afholdt i foråret 2002. Tanken var at komme ind på matematiske emner, som har opnået en vis popularitet i offentligheden, men som måske ikke alle er kendt af de matematikstuderende (eller deres lærere).

Noterne her er skrevet på basis af mine mangelfulde notater til forelæsningerne. Det har været de studerendes opgave at skrive mine notater om så de fik den form de burde have haft da jeg holdt forelæsningerne. Det har derfor været nødvendigt for forfatterne kraftigt at bearbejde mit oplæg og i flere tilfælde at komme med helt selvstændige ændringer og tilføjelser.

Det var oprindeligt tanken at dette skulle kunne fungere som et opslagsværk for nysgerrige matematikstuderende. Det var også tanken at nye kapitler om aktuelle emner løbende skulle tilføjes. Hvis nogen har lyst og energi til at føre arbejdte videre, kan de kontakte mig.

Jesper Møller

Indhold

Kapitel 1

Kaotiske systemer

Afsnit 1.1-1.3 af Sune Nørgård-Sørensen
Afsnit 1.4 af Mikkel Falsled

1.1 Definition af kaos

Man hører ofte begrebet kaos blive anvendt inden for fysik, kemi og biologi uden at være helt klar over, hvad begrebet egentlig dækker over. Den type kaos vi her vil behandle er såkaldt deterministisk kaos. Vi har et system, hvis udvikling over tid er fuldstændig givet, det øjeblik vi kender begyndelsesbetingelserne. Systemet er løst sagt kaotisk, hvis bare små ændringer i begyndelsesbetingelserne medfører store ændringer i systemets udvikling. Denne betingelse er imidlertid ikke nok for at få en brugbar definition af kaos. Vi vil kræve to ekstra betingelser opfyldt, før vi vil kalde et system kaotisk:

Definition 1.1.1. *Lad (X, d) være et metrisk rum. Funktionen $f : X \to X$ siges at være kaotisk hvis*

1. *f er sensitiv over for begyndelsesbetingelserne*

2. *f er transitiv.*

3. *De periodiske punkter ligger tæt.*

Lad U og V være åbne delmængder af X. Ovenstående definition siger da, at:

1. $\exists \delta > 0 \forall x \in X \forall U \ni x \exists n \in \mathbb{N} \exists y \in U : d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   hvor f^n betyder f sammensat med sig selv n gange.

2. $\forall U, V \exists n : f^n(U) \cap V \neq \emptyset$

3. Enhver omegn af ethvert punkt i X indeholder mindst ét periodisk punkt.

Et periodisk punkt x er karakteriseret ved, at $x = f^n(x)$ for et $n \geq 1$.

Det er muligt at vise, at betingelse 1 følger af betingelse 2 og 3. I det følgende eksempel er alle betingelser dog eftervist af hensyn til den skeptiske læser.

Eksempel Lad S være enhedscirklen i det komplekse plan, altså $S = \{e^{i\theta} | \theta \in [0, 2\pi[\}$. Funktionen $f : S \to S$, der fordobler vinkler, har formen $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$, eller ækvivalent $f(z) = z^2$, hvor $z \in S$. Denne funktion er kaotisk på enhedscirklen. Vi har tre betingelser, der skal eftervises:

Sensitivitet Lad $e^{i\theta_0} \in S$. For en given omegn U omkring $x = e^{i\theta_0}$ findes $a > 0$ så $K = \{e^{i\theta} | \theta \in]\theta_0 - a; \theta_0 + a[\}$ er indeholdt i U. Der gælder nu, at

$$f^n(K) = \{e^{2^n i\theta} | \theta \in]\theta_0 - a; \theta_0 + a[\} = \{e^{i(2^n\theta_0 - \theta)} | \theta \in] - 2^n a; 2^n a[\}$$

Vælg $n > 0$ så $[0; 2\pi[\subset] - 2^n a; 2^n a[$. Dermed vil $S \subseteq f^n(K)$. Da billedet af f er indeholdt i S, er $f^n(K) = S$. Ergo findes et punkt $y \in K \subseteq U$, så $f^n(y) = f^n(x) \cdot e^{\pi i}$. Sæt $\delta = 1$. Da er

$$|f^n(x) - f^n(y)| = |f^n(x)(1 - e^{\pi i})| = |1 - e^{\pi i}| = 2 > 1 = \delta$$

Dette viser, at sensitivitetsbetingelsen er opfyldt.

Transitivitet Lad U og V være åbne delmængder af S. Som før findes $n \in \mathbb{N}$, så $f^n(U) = S$. Dermed dækker $f^n(U)$ også V, og ergo er deres fællesmængde ikke tom. Dette viser transitivitetsbetingelsen.

Periodiske punkter Lad $e^{i\theta_0} \in S$. For en given omegn U omkring $x = e^{i\theta_0}$ findes som før $a > 0$ så $K = \{e^{i\theta} | \theta \in]\theta_0 - a; \theta_0 + a[\}$ er indeholdt i U.

De periodiske punkter er løsningerne til ligningerne $f^n(z) = z^{2n} = z$, hvor $z \in S$ og $n \in \mathbb{N}$. Vi søger altså løsninger til ligninger af formen $z^{2n-1} = 1$. Løsningerne til en sådan ligning er de $2n - 1$'te enhedsrødder, der har formen $z = e^{\frac{2\pi i}{2n-1}m}$, hvor $m \in \{0, \ldots, n-1\}$. Vælg n_0, så $\frac{2\pi i}{2n_0 - 1} < 2a$. Vi kan nu vælge m_0, så $\frac{2\pi i}{2n_0 - 1} m_0 \in]\theta_0 - a; \theta_0 + a[$. Dermed ligger det periodiske punkt $e^{\frac{2\pi i}{2n_0 - 1} m_0}$ i K. Dette viser, at de periodiske punkter ligger tæt i S.

1.2 Den logistiske ligning

Den logistiske ligning $f(x) = ax(1 - x)$ bruges blandt andet inden for biologi til at beskrive en populations udvikling. Vi skal se, at selv en simpel ikke lineær ligning som den logistiske, er kaotisk for visse værdier af a.

1.2.1 Fikspunkter og cykler

Først en række generelle definitioner:

Definition 1.2.1. *Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion. Da siges $x \in \mathbb{R}$ at være et* fikspunkt *for f, hvis $f(x) = x$.*

Et fikspunkt x siges at være tiltrækkende *hvis $0 < |f'(x)| < 1$ og omvendt* frastødende *hvis $1 < |f'(x)|$. Fikspunktet siges at være* supertiltrækkende *hvis $|f'(x)| = 0$, og* neutralt *hvis $|f'(x)| = 1$*

Følgende lemma giver en begrundelse for ovenstående definitioner:

Lemma 1.2.2. *Hvis y er et tiltrækkende fikspunkt for f eksisterer der et $\epsilon > 0$, så for alle $x \in]y - \epsilon; y + \epsilon[$ gælder, at $f^n(x) \to y$ for $n \to \infty$. Hvis y er et frastødende fikspunkt, gælder derimod, at der eksisterer et $\epsilon > 0$, så for alle $x \in]y - \epsilon; y + \epsilon[$ er $|f(x) - y| > |x - y|$.*

Bevis: Lad y være et tiltrækkende fikspunkt. Da gælder per definition

$$|f'(y)| = |\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h)-f(y)}{h}| = |\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h)-y}{h}| < 1$$

Ergo findes $\epsilon > 0$ så for alle $x \in]y-\epsilon, y+\epsilon[\setminus \{y\}$ er

$$|\frac{f(x)-y}{x-y}| < 1$$

Dette medfører, at

$$|f(x)-y| < |x-y| < \epsilon$$

Heraf ses, at $f(x) \in]y-\epsilon; y+\epsilon[$, og dermed gælder

$$|f(f(x))-y| < |f(x)-y| < |x-y|$$

Hvis denne proces fortsættes, ser vi, at $(|f^n(x)-y|)_{n\in\mathbb{N}}$ er en aftagende følge, der endvidere er nedad begrænset af 0. Ergo konvergerer følgen. Dermed må følgen $(f^n(x)-y)_{n\in\mathbb{N}}$ også konvergere.

Idet $f^n(x)-y \in]-|x-y|; |x-y|[\subset [-|x-y|; |x-y|] \subset]-\epsilon; \epsilon[$, må $\lim_{n\to\infty} f^n(x) \in [-|x|; |x|] \subset]y-\epsilon; y+\epsilon[$. I mængden $]y-\epsilon, y+\epsilon[\setminus \{y\}$ er der ingen fikspunkter for f. Hvis nemlig $x \in]y-\epsilon, y+\epsilon[\setminus \{y\}$ var et fikspunkt, ville der gælde

$$|\frac{f(x)-y}{x-y}| = |\frac{x-y}{x-y}| = 1 < 1$$

hvilket er en modstrid.

Da f er kontinuert, gælder $f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$. Heraf ses, at $\lim_{n\to\infty} f^n(x) \in]y-\epsilon; y+\epsilon[$ er et fikspunkt for f. Dermed må $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = y$, da y er det eneste fikspunkt i mængden $]y-\epsilon; y+\epsilon[$. Dette viser det første udsagn.

Antag nu, at y er et frastødende fikspunkt. Dermed gælder per definition

$$|f'(y)| = |\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h)-f(y)}{h}| = |\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h)-y}{h}| > 1$$

Som før findes $\epsilon > 0$, så for alle $x \in]y-\epsilon, y+\epsilon[\setminus \{y\}$ er

$$|\frac{f(x)-y}{x-y}| > 1$$

Herved fås, at

$$|f(x)-y| > |x-y|$$

Dette viser sidste udsagn i lemmaet. □

Som udvidelse af begrebet fikspunkter, indfører vi begrebet n-cykler.

Definition 1.2.3. *Mængden* $\{f^0(x) = x, f^1(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ *kaldes en n-cykel, hvis* $f^n(x) = x$, *og* $f^i(x) \neq f^j(x)$ *for alle* $i \neq j$. *En n-cykel siges at være henholdsvis tiltrækkende, frastødende, supertiltrækkende eller neutral, hvis x er henholdsvis et tiltrækkende, frastødende, supertiltrækkende eller neutralt fikspunkt for funktionen* f^n.

Et element i en n-cykel, kaldes et periode-n-punkt, eller blot et periodisk punkt.

Bemærkning 1.2.4. *Hvis* $\{f^0(x) = x, f^1(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ *er en* $n-$ *cykel, er alle elementerne i* $n-$ *cyklen oplagt fikspunkter for* f^n*. Idet*

$$(f^n)'(x) = f'(x)f'(f(x))f'(f^2(x)) \cdot \cdots \cdot f'(f^{n-1})$$

er $(f^n)'(x) = (f^n)'(f^i(x))$ *for alle* $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*. Ergo er alle elementerne i* $n-$ *cyklen henholdsvis tiltrækkende, frastødende, supertiltrækkende eller neutrale punkter for* f^n*, hvis og kun hvis* x *er henholdsvis et tiltrækkende, frastødende, supertiltrækkende eller neutralt punkt for* f^n*.*

1.2.2 Den logistiske ligning og kaos

Som eksempel på kaos betragter vi funktionen $f : [0; 1[\to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = ax(1-x) = -ax^2 + ax$, hvor $a \in [0; 4]$. f kaldes den logistiske ligning. I dette afsnit skal vi se, at for visse værdier af a er f kaotisk.

Hvis x er et fikspunkt for f, skal x opfylde, at $f(x) = ax(1-x) = x$. Ved at løse andengradsligningen ses, at $x_0 = 0$ og $x_1 = 1 - \frac{1}{a}$ er fikspunkter for f. Den afledte af f er $f'(x) = a - 2ax$. Idet $f'(0) = a$, er $x = 0$ et tiltrækkende fikspunkt når $a < 1$, og et frastødende fikspunkt når $a > 1$. For det andet fikspunkt får vi, at $f'(x_1) = f'(1 - \frac{1}{a}) = 2 - a$, så x_1 er tiltrækkende når $a \in]1; 3[$, frastødende når $a \in]0; 1[\cup]3; 4[$, supertiltrækkende når $a = 2$, og neutralt når $a = 1$.

Vi går nu over til at studere 2-cyklerne for f.

Lemma 1.2.5. *Der eksisterer netop én 2-cykel for* $f = ax(1-x)$*, hvis og kun hvis* $a \in]3 : 4]$*. Hvis der eksisterer en 2-cykel, er den givet ved* $\{p, q\}$ *hvor* $p = \frac{a+1+\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$ *og* $q = \frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$*.*

Bevis: Hvis $\{p, q\}$ er en 2-cykel for f skal p og q opfylde, at $f^2(p) = p$, og $f^2(q) = q$. Ved udregning fås, at

$$f^2(x) = aax(1-x)(1-ax(1-x)) = a^2x(1-x)(ax^2 - ax + 1) = x \Leftrightarrow$$

$$a^2(1-x)(ax^2 - ax + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

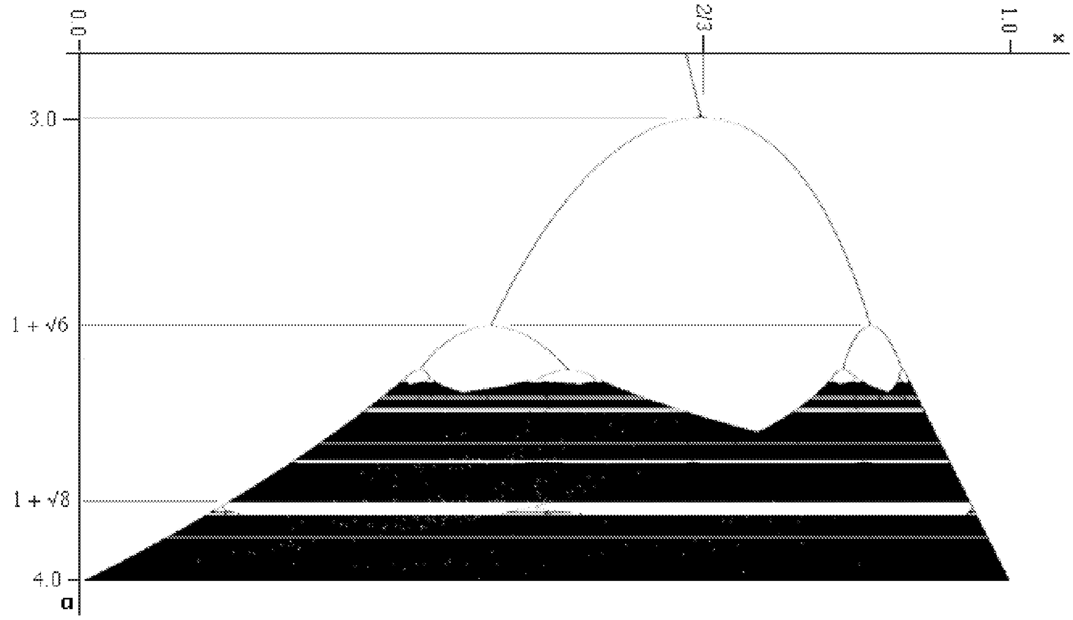
$$-a(x - (1 - \frac{1}{a}))(a^2x^2 - (a^2 + a)x + a + 1) = 0$$

Roden $x = 1 - \frac{1}{a}$ har vi tidligere set er fikspunkt for f. Elementerne i 2-cyklen er derfor rødderne i $(a^2x^2 - (a^2 + a)x + a + 1) = 0$. Diskriminanten D for denne andengradsligning er $D = (a^2 + a)^2 - 4a^2x^2(a + 1) = a^2(a + 1)(a - 3)$. Da er $D > 0$ hvis og kun hvis $a < -1$ eller $a > 3$. Når $D > 0$ har ligningen to løsninger nemlig $x = \frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$. Ved indsætning i f ses at disse to løsninger ikke er fikspunkter. Dette viser lemmaet. $\square$

Lemma 1.2.6. *2-cyklen* $\{p, q\}$ *nævnt i lemma 1.2.5 er tiltrækkende hvis* $3 < a < 1 + \sqrt{6}$*, frastødende hvis* $1 + \sqrt{6} < a \leq 4$ *og neutral hvis* $a = 1 + \sqrt{6}$*.*

Bevis: Vi betragter $|(f^2)'(p)|$. Ved udregning fås, at

$$(f^2)'(p) = f'(f(p))f'(p) = f'(q)f'(p) = a^2(1-2q)(1-2p) = a^2(4pq - 2(p+q) + 1)$$



Figur 1: Feigenbaumdiagram for den logistiske ligning

Idet $\{p,q\} = \{\frac{a+1+\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}, \frac{a+1-\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}\}$, fås ved en simpel udregning, at $p+q = \frac{a+1}{a}$ og $pq = \frac{a+1}{a^2}$. Ovenstående udtryk bliver da

$$(f^2)'(p) = a^2(4\frac{a+1}{a^2} - 2\frac{a+1}{a} + 1) = -a^2 + 2a + 4$$

Cyklen $\{p,q\}$ er neutral netop når $|(f^2)'(p)| = |-a^2+2a+4| = 1$. Idet andengradsligningen $-a^2+2a+4 = 1$ har løsningerne $a = -1, 3$, og andengradsligningen $-a^2+2a+4 = -1$ har løsningerne $a = 1 \pm \sqrt{6}$, er cyklen neutral netop når $a = 1+\sqrt{6}$, idet $a \in]3;4]$. Endvidere får vi, at $0 < |(f^2)'(p)| = |-a^2+2a+4| < 1$ for $a \in]3; 1+\sqrt{6}[$, og $1 < |(f^2)'(p)| = |-a^2+2a+4|$ for $a \in]1+\sqrt{6}; 4]$. Dette viser sætningen. □

1.2.3 Feigenbaums konstant

Vi så i det foregående afsnit, at den logistiske ligning $f(x) = ax(1-x)$ har en stabil 1-cykel netop når $a \in]1;3[$, og en stabil 2-cykel netop når $a \in]3; 1+\sqrt{6}[$. Vi kunne fortsætte vores analyse, og finde stabile 3-cykler, 4-cykler og så videre. Dette bliver imidlertid sværere og sværere at gøre analytisk. Numerisk er det imidlertid en helt anden sag. Hvis man får et computerprogram til at beregne de stabile cykler for den logistiske ligning, får vi et Feigenbaumdiagram (figur 1), der viser de stabile periodiske punkter afbildet ud af førsteaksen, som funktion af parameteren a, der er afbildet ud af andenaksen.

Vi ser ud fra diagrammet, at den logistiske ligning undergår periodefordobling. Den logistiske ligning går fra at have en stabil 2^0-cykel til at have en stabil 2^1-cykel, derefter en stabil 2^2 cykel og så fremdeles. Den værdi af a hvor den logistiske ligning skifter fra at have en cykel af periode 2^n til en cykel af periode 2^{n+1} kalder vi c_n. Disse såkaldte bifurkationspunkter kan blive evalueret ved hjælp af numeriske metoder. Analytisk har vi set, at $c_0 = 3$ og $c_1 = 1+\sqrt{6} = 3,449\ldots$. Overraskende finder man, at følgen c_n konvergerer. Grænseværdien bliver

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 3.569946\ldots$$

Det spørgsmål der umiddelbart melder sig er, hvad i alverden der sker for $a > \lim_{n\to\infty} c_n$. Dette spørgsmål vil vi forsøge at besvare i næste afsnit.

For en vilkårlig funktion der undergår periodefordobling, kan vi lave en tilsvarende analyse og beregne c_n. Størrelsen

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4.669162\ldots$$

kaldes Feigenbaums konstant. Det viser sig, at mens $\lim_{n\to\infty} c_n$ afhænger af hvilken funktion vi betragter, er d en universal konstant. Feigenbaums konstant er for funktioner der undergår periodefordobling, hvad π er for cirkler.

1.3 Periode-3-vinduet

I Feigenbaumdiagrammet kan vi se, at efterhånden som c_n nærmer sig sin grænseværdi kommer de periodiske punkter løst sagt til at ligge tættere og tættere. Når a går hen og og bliver større end $\lim_{n\to\infty} c_n$, bliver systemet kaotisk, hvad vi dog ikke vil vise her. Overraskelsen ligger i, at for a lig med $1 + \sqrt{8}$ opstår ud af kaos et "vindue" med en tiltrækkende 3-cykel. Derefter ser det ud til, at mønsteret gentager sig, og vi igen når til kaos, før der ud af kaos springer en tiltrækkende 5-cykel. Vi ser altså periode-3-vinduer, periode-5-vinduer og så fremdelses opstå, efterhånden som a nærmer sig sit maksimum på 4.

I dette afsnit vil vi nærmere analysere periode-3-vinduet. Vi skal se, at når der eksisterer en 3-cykel, eksisterer der en n-cykel for alle $n \in \mathbb{R}$. Disse er frastødende, og derfor ikke med på Feigenbaumdiagrammet.

Vi viser først et enkelt lemma:

Lemma 1.3.1. *Lad $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Antag $f : I \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og antag $I \subseteq f(I)$. Da har f et fikspunkt i intervallet I.*

Bevis: Hvis $f(a) = a$ eller $f(b) = b$ er a eller b fikspunkt for f. Antag nu $f(a) \neq a$ og $f(b) \neq b$. Da eksisterer $x, y \in]a, b[$ så $f(x) = a$ og $f(y) = b$, idet $I \subseteq f(I)$. Betragt funktionen $g(x) = f(x) - x$. Idet $g(x) = f(x) - x = a - x < 0$ og $g(y) = f(y) - y = b - y > 0$ og f er kontinuert, findes et $p \in]x; y[\subseteq I$, hvor vi antager $x < y$, så $g(p) = f(p) - p = 0$. $\square$

Sætning 1.3.2. *Lad I være et delinterval af $\mathbb{R}$. Antag $f : I \to I$ er kontinuert. Hvis der eksisterer en periode-3-cykel for f, da har f en periode-n-cykel for alle $n \in \mathbb{R}$.*

Bevis: Lad 3-cyklen for f være givet ved $\{a, b, c\}$, hvor $a < b$ og $a < c$. I det følgende vil vi endvidere antage, at $b < c$. Tilfældet $c < b$ kan vises ud fra samme fremgangsmåde. Bemærk, at for tilfældet $a < b < c$ gælder $[b, c] \subseteq f([a, b])$ og $[a, c] \subseteq f([b, c])$.

Antag først, at $n > 3$. Idet $[b, c] \subseteq f([b, c])$, og f er kontinuert, findes et lukket interval I_1 i $[b, c]$, så $f(I_1) = [b, c]$. Tilsvarende findes, idet $I_1 \subseteq [b, c] = f(I_1)$, et lukket interval I_2 i I_1, så $f(I_2) = I_1$. Hvis vi fortsætter på samme vis, får vi, at der findes et lukket interval $I_{i+1} \subseteq I_i$, så $f(I_{i+1}) = I_i$. Dette giver os følgende kæde af lukkede intervaller:

$$I_{n-2} \subseteq \cdots \subseteq f(I_3) = I_2 \subseteq f(I_2) = I_1 \subseteq f(I_1) = [b, c]$$

Idet $I_{n-2} \subseteq [b, c] \subseteq f([a, b])$, findes et interval $I_{n-1} \subseteq [a, b]$, sådan at $f(I_{n-1}) = I_{n-2}$. Slutteligt findes, idet $I_{n-1} \subseteq [a, b] \subseteq f([b, c])$, et interval $I_n \subseteq [b, c]$, så $f(I_n) = I_{n-1}$.

Der gælder nu, at $f^n(I_n) = [b, c] \supseteq I_n$. Dermed eksisterer ifølge lemma 1.3.1 et punkt $p \in I_n \subseteq [b, c]$, der er fikspunkt for f^n. Idet $f(p) \in I_{n-1} \subseteq [a, b]$ og $f^i(p) \subseteq [b, c]$ for $2 \leq i \leq n$, er p lig med b eller et periode-n-punkt for f. Hvis $p = b$ ville $f^2(p) = a \notin [b, c]$, hvilket er en modstrid. Ergo er p et periode-n-punkt for f. Dette viser sætningen i tilfældet $n > 3$.

Idet $f([b, c]) \supseteq [b, c]$ siger lemma 1.3.1, at f har et fikspunkt. Dette viser sætningen i tilfældet $n = 1$.

Da $f([a, b]) \supseteq [b, c]$ findes et lukket interval $I \subseteq [a, b]$, så $f(I) = [b, c]$. Derfor er $f^2(I) = f([b, c]) \subseteq [a, b]$. Ifølge lemma 1.3.1 findes et fikspunkt p for f^2 i $I \subseteq [a, b]$. Idet $f(p) \in [b, c]$, $f^2(p) \in [a, b]$ og $[a, b] \cap [b, c] = b$ og b per definition er et periode-3-punkt, må p være et periode-2-punkt for f. □

Ovenstående sætning er et specialtilfælde af følgende sætning som vi her vil angive uden bevis:

Sætning 1.3.3. *Lad I være et interval i $\mathbb{R}$ og lad $f : I \to I$ være kontinuert. Hvis der er et periode-n-punkt for f, da er der periode-k-punkter for alle positive heltal k der efterfølger n i følgende liste:*

$$\begin{array}{l} 3, 5, 7, 9, \ldots \\ 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 9, \ldots \\ 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 9, \ldots \\ 2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, 2^3 \cdot 9, \ldots \\ \vdots \\ \ldots, 2^n, \ldots, 2^2, 2, 1 \end{array}$$

1.4 Kaos og den kvadratiske familie

1.4.1 Backshift

Det vi nu skal se på, er en meget simpel funktion kaldet Backshift. Det er relativt let at vise at den er kaotisk. Det er så vores mål i næste afsnit at overføre egenskaben til andre funktioner. Her vil vi starte med at definere rummet hvorpå den virker

Definition 1.4.1.

$$\Sigma = \{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots) | \sigma_i \in \{1, 2\}\}$$

for $\sigma, \tau \in \Sigma$ *definerer vi*

$$d(\sigma, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\sigma_i - \tau_i|}{2^i}$$

Sætning 1.4.2. *d er en metrik så:*
i) (Σ, d) *er et metrisk rum*
ii) $d(\sigma, \tau) \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \sigma_1 = \tau_1, \ldots, \sigma_n = \tau_n$

Bevis:
i) Er op til læseren at bevise, da det er meget enkelt.

ii) Antag $\sigma_j \neq \tau_j$ for $j < n$, da er

$$d(\sigma, \tau) \geq \frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^n}$$

Hvis $\sigma_1 = \tau_1, \ldots, \sigma_n = \tau_n$ da er

$$d(\sigma, \tau) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\sigma_i - \tau_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

□

Betragt nu funktionen B:$\Sigma \to \Sigma$ givet ved
$B(\sigma_1\sigma_2 \ldots) = \sigma_2\sigma_3 \ldots$
Dette er Backshiftfunktionen i al sin enkelthed. Den fjerner simpelthen det første tal i følgen.

Lemma 1.4.3. *B er kontinuert*

Bevis: Givet $\sigma, \tau \in \Sigma$. Vi kan antage at $d(\sigma, \tau) < \frac{1}{2}$, uden at vi mister generelitet. Altså må $\sigma_1 = \tau_1$, og dermed

$$d(B(\sigma), B(\tau)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\sigma_{i+1} - \tau_{i+1}|}{2^i} = 2 \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|\sigma_i - \tau_i|}{2^i} = 2d(\sigma, \tau)$$

□

Sætning 1.4.4. *B er kaotisk på* (Σ, d)

Bevis: Der er tre ting vi skal vise: 1) sensitivitet 2) transitivitet 3) de periodiske punkter ligger tæt.
1) Lad δ være $\frac{1}{2}$, og lad $\sigma \in \Sigma$ og $r > 0$ være givet.
Idet kuglerne i et metrisk rum udgør en omegnsbasis, er det nok at finde y i kuglen $k(\sigma, r)$, og $n \in N$, så $d(B^n\sigma, B^n y) > \frac{1}{2}$
Vælg n så $\frac{1}{2^n} < r$
Lad nu y være givet på følgende måde: På de første n pladser skal y og σ være ens og på de resterende pladser skal de være forskellige. Iflg. sætning1.4.2 vil $y \in k(\sigma, r)$ og

$$d(B^n\sigma, B^n y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 > \frac{1}{2}$$

2) Lad $u, v \in \Sigma$ og $U = k(u, r_u)$ og $V = k(v, r_v)$ være givet.
Vi skal nu finde $n \in N$ så:

$$B^n(U) \cap V \neq \varnothing$$

Vælg n så $\frac{1}{2^n} < r_u$ og $\frac{1}{2^n} < r_v$
Da vil $x = u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n, *** \quad \in k(u, r_u)$
og $B^n(x) = v_1, v_2, \ldots, v_n, *** \quad \in k(v, r_v)$
dvs. $x \in B^n(U) \cap V$
De tre stjerner betyder at det er ligegyldigt hvad der står på de efterfølgende pladser.
3) De periodiske punkter ligger tæt.
Lad $x \in \Sigma$ og $r \in R^+$ være givet

Vi ønsker at finde et periodisk punkt i $k(x,r)$.
Vælg $n \in N$ så $\frac{1}{2^n} < r$
Da vil punktet y, givet på følgende måde $y = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_1 \ldots$
være periodisk og ligge i $k(x,r)$. □

Vi vil gerne identificere Σ med Cantormængden. Vi forventer at læseren ved hvordan Cantormængden fremkommer. Vi starter med et punkt σ i Σ, tegningen skulle så gerne vise vejen til punktet i Cantormængden. Cantormængden fremkommer ved at dele enhedsintervallet i to. Starter følgen med et 1 tal vælger vi det venstre af de to ellers det højre. Enhedsintervallet bliver reduceret til Cantormængden ved en fortsat opdeling og hvert tal i følgen angiver på denne måde hvad vej vi skal gå.

$$\begin{array}{cccccccc} & & \underline{1} & & & \underline{2} & & \\ & & \underline{11}\ \underline{12} & & & \underline{21}\ \underline{22} & & \\ \underline{111}\ \underline{112} & & \underline{121}\ \underline{122} & & & \underline{211}\ \underline{212} & & \underline{221}\ \underline{222} \end{array}$$

Funktionen der laver denne afbildning er $T : \Sigma \to C.$, givet ved

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{x_i}}{3^i}$$

hvor $\bar{1} = 0$ og $\bar{2} = 2$
Man kan vise at T er en homeomorfi, og det får afgørende betydning, som vi nu skal se.

1.4.2 Konjugerede afbildninger.

Definition 1.4.5. *Lad $f : X \to X$ og $g : Y \to Y$. Vi siger at f og g er konjugerede afbildninger, hvis der findes en homeomorfi $T : X \to Y$ således at nedenstående diagram kommuterer.*

$$\begin{array}{cccc} & X & \xrightarrow{f} & X & \\ T & \downarrow & & \downarrow & T \\ & Y & \xrightarrow{g} & Y & \end{array}$$

Dvs. $g \circ T = T \circ f$
Hvis T kun er surjektiv, siger vi at g er semikonjugeret med f.

Vi minder om, at en homeomorfi er en bijektiv afbildning, der er kontinuert og med kontinuert invers.

Sætning 1.4.6. *Lad f og g være konjugerede. Da gælder:*

$$f \text{ er kaotisk} \Leftrightarrow g \text{ er kaotisk}$$

Hvis g er semikonjugeret med f og Y er uendelig da gælder:

$$f \text{ er kaotisk} \Rightarrow g \text{ er kaotisk}$$

Beviset overspringes her.

1.4.3 Den kvadratiske familie

Den kvadratiske familie er givet ved:

$$f_c(x) = x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Vi vil finde fikspunkter for f_c:

$$f_c(x) = x \Leftrightarrow x^2 + c = x \Leftrightarrow x^2 - x + c = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$

Dvs. f_c har to fikspunkter hvis $c < 1/4$. I det næste er det underforstået, at $c < 1/4$
Vi vil nu undersøge mængden af punkter hvor f_c har begrænset bane. Vi sætter:

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R} |\ f_c(x) \nrightarrow \infty \text{ for } n \to \infty\}$$
$$\text{Sæt endvidere:} \quad k = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2} \quad \text{og} \quad I = [-k; k]$$

Det ses let at for $x > k$ vil $f^n(x) \to \infty$ for $n \to \infty$ Da f er lige gælder det tilsvarende for $x < -k$. Det betyder $\Lambda \subseteq I$
Nu vil vi se på tilfældet $c < -2$. Da bliver Λ meget kompleks. Den fremkommer ved at fjerne en åben mængde midt i intervallet I, og dernæst fjerne åbne mængder midt i de tilbageblevne og så fremdeles. Konstruktionen skulle gerne minde om Cantormængden. Vi vil nu lave en bijektiv korespondance T mellem Λ og Σ, på samme måde, som vi gjorde tidligere mellem Cantormængden og Σ. Det interessante er nu at man kan vise at nedenstående skema kommuterer og at T er en homeomorfi.

$$\begin{array}{cccc} & \Lambda & \xrightarrow{f_c} & \Lambda & \\ T & \downarrow & & \downarrow & T \\ & \Sigma & \xrightarrow{B} & \Sigma & \end{array}$$

Vi ved B er kaotisk og så giver sætning 1.4.6 at så er f_c for $c < -2$ også kaotisk.
For $1/4 \leq c \leq -2$ gælder $\Lambda = I$. Vi vil nu se på det tilfælde hvor $c = -2$

Sætning 1.4.7. *Den kvadratiske funktion* $g(x) = x^2 - 2$ *er kaotisk på intervallet* $[-2; 2]$

Bevis: For at bevise sætningen vil vi vende tilbage til en funktion som vi har behandlet i eksemplet på side 6. Det er funktionen $f(z) = z^2$ for $z \in S = \{e^{i\theta} |\ \theta \in [0; 2\pi]\}$
Vi definerer nu $T : S \to [-2; 2]$ ved $T(e^{i\theta}) = 2\cos\theta$
Det er oplagt at T er kontinuert og surjektiv. Dernæst skal vi efterse at diagrammet kommuterer:

$$\begin{array}{cccc} & S & \xrightarrow{f} & S & \\ T & \downarrow & & \downarrow & T \\ & [-2;2] & \xrightarrow{g} & [-2;2] & \end{array}$$

Dvs. vi skal se at $g \circ T = T \circ f$

$$g \circ T(e^{i\theta}) = g(2\cos\theta) = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$$

da $\cos 2v = 2\cos^2 v - 1$

$$T \circ f(e^{i\theta}) = T(e^{2i\theta}) = 2\cos 2\theta$$

sætning 1.4.6 fortæller at da f er kaotisk så er g det også. $\square$

1.4.4 De kvadratiske og logistiske familier.

Vi har indtil viderer behandlet den kvadratiske og logistiske familie separat, men nu skal vi se at de hører sammen.

Sætning 1.4.8. *Lad funktionerne g_a og f_c være givet ved:*

$$g_a(x) = ax(1-x) \quad \textit{for} \quad 0 < a < 4$$

$$f_c(x) = x^2 + c \quad \textit{for} \quad c = -\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}$$

Da er g_a konjugeret med f_c ved hjælp af $T(z) = -z/a + 1/2$

Bevis: Det er oplagt at T er en homeomorfi, så vi skal blot vise:

$$g_a \circ T(x) = T \circ f_c(x)$$

$$g_a \circ T(x) = g(\frac{-x}{a} + \frac{1}{2}) = a\left(\frac{-x}{a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$a\left(-\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$T \circ f_c(x) = \frac{-x^2 - c}{a} + \frac{1}{2} = a\left(\frac{-x^2}{a^2} - \frac{c}{a^2} + \frac{1}{2a}\right) =$$

$$a\left(\frac{-x^2}{a^2} + \frac{a^2/4 - a/2}{a^2} + \frac{1}{2a}\right) = a\left(-\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4}\right)$$

$\square$

Sætningen giver på den måde mulighed for at føre resultater opnået i den ene familie over til den anden. Du kan nu læse kapitlet igen og få en endnu større oplevelse ud af det.

Kapitel 2

Fraktaler

Af Louise Jakobsen,
Mette Louise Pedersen og
Jonas B. Rasmussen

ABSTRACT: Dette kapitel er en introduktion til fraktalbegrebet, der tager udganspunkt i Mandelbrots definition af en fraktal. For at kunne definere en fraktal, gennemgås Hausdorff mål, Hausdorff dimension og den topologiske dimension af delmængder af metriske rum. Endvidere behandles de geometriske og selv-simlære fraktaler, og her fremhæves eksempler som *Kochs kurve*, *Sierpinskis trekant* og *Cantor-mængden.*

2.1 Indledning

Fraktalteorien har sine rødder i arbejdet af Fatou, Julia, Cantor og Peano fra begyndelsen af 1900-tallet. Derefter var det først i 1967, da Mandelbrot skrev en artikel med titlen *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension* og efterfølgende en bog i 1977, *Fractals: Form, chance, and dimension*, at datamaskinernes og fraktalteoriens muligheder blev forenede. Det var også Mandelbrot, der var den første der brugte ordet fraktaler, som stammer fra det latinske '*fractus*', der kommer af verbet '*frangere*', som betyder at knække.

Fraktalstrukturer var opdaget af matematikere for over hundrede år siden og er blevet brugt som eksempler på kurver med længde, man ikke kan måle eller kurver, der er kontinuerte men ikke differentiable nogle steder, og hvor det er muligt at tegne en tangent til hvert af kurvens punkter [Gou96].

2.1.1 Definition af fraktaler

Der er ingen klar definition eller enighed om, hvordan man definerer en fraktal. Et eksempel kunne være, at en fraktal er en kurve, som ikke er differentiabel noget sted, og en anden kunne være, at en fraktal er en delmængde af simple geometriske rum.

I bogen *"Fractal geometry"* har Falconer [Fal90] fundet visse ligheder ved fraktaler og ud fra det opstillet fem kriterier, som er karakteriserende for en fraktal F

(i) F har en pæn struktur, det vil sige at F har detaljer i små skalaer.

(ii) F er for irregulær til at blive beskrevet i traditional geometrisk forstand, både lokalt og globalt.

(iii) F har ofte en form for selvsimilaritet.

(iv) Sædvanligvis har F en tilhørende 'fraktal dimension', der er større end dens topologiske dimension.

(v) I de fleste tilfælde er F defineret på en simpel måde, måske rekursivt.

Punkt (iv) er det tætteste vi kommer på en matematisk definition af fraktalbegrebet, hvilket også er den Mandelbrot benytter [Man77].

Definition 2.1.1. *Lad $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Da er F er en fraktal hvis* $\dim_H F > \dim_T F$.

Her er $\dim_T$ den topologiske dimension, mens $\dim_H$ er Hausdorff dimensionen, som defineres i afsnit 2.4. Der vil endvidere gælde at $\dim_H A \in \mathbb{R}$ og at $\dim_T A \in \mathbb{Z}$ for en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

2.2 Længden af Englands kystlinie

For at finde ud af, hvor lang en kystlinie mellem to givne faste punkter er, kan man benytte en brudt linie med en vis længde. Kalder vi størrelsen på den måleenhed, som vi ønsker at benytte for ε, fås den approksimerede længde $L(\varepsilon)$ af kystlinien ved at multiplicere antalllet af iterationer med ε. Altså bliver $L(\varepsilon)$ større, når ε gøres mindre, og vi forventer, at $L(\varepsilon)$ ender med en veldefineret værdi for den 'rigtige længde'. Da $L(\varepsilon)$ ikke går mod en grænse, vil det sige, at denne kurve ikke har en veldefineret længde. Dette skyldes, at en kystlinie består af et uendeligt antal takkede linier, så ligegyldigt hvor lille vi vælger vores ε, vil dette ikke være tilstrækkeligt. Herved kan vi betragte længden af en kystlinie som en fraktal, og denne problemstilling er bedre kendt som kystlinie-paradokset.

Richardson studerede i 1961 variationen af approksimerende længder af forskellige kystlinier ved brug af en brudt linie. Han fandt frem til, at der er to styrende konstanter λ og D, og at man skal bruge tilnærmelsesvis $F\varepsilon^{-D}$ intervaller af længde ε for at tilnærme længden af kystlinier, dvs.

$$L(\varepsilon) \sim F\varepsilon^{1-D} \Rightarrow \log\big(L(\varepsilon)\big) = \log(F) + (1-D)\log(\varepsilon) \tag{2.1}$$

Som det ses af ligning (2.1) er der en lineær sammenhæng mellem $\log\big(L(\varepsilon)\big)$ og $\log(\varepsilon)$, hvor hældingen er konstanten D. Ifølge Richardsson var D en simpel eksponent uden videre betydning, men det har senere vist sig, at D afhænger af hvilken kystlinie vi vælger, og at forskellige stykker af den samme kystlinie skal betragtes seperalt, hvilket kan give forskellige værdier af D.

2.2.1 En kystlinies fraktal dimension

Ifølge Mandelbrot skal man betragte eksponenten D som fraktal dimensionen, hvis D ikke er heltalligt. Fraktal dimensionen er ikke topologisk, men metrisk. Den involverer et metrisk rum Ω, det vil altså sige, et rum hvor afstanden mellem to punkter er veldefineret. En lukket hhv. åben bold B med centrum i ω og med radius r er mængden af alle punkter, hvis afstand til ω er mindre eller lig r hhv. strengt mindre.

Hvis vi har givet en begrænset mængde S i Ω, er der mange metoder til at dække denne mængde med bolde af radius r, hvor man skal bruge dimensionsbegrebet. En metode, som Cantor er ophavsmand til, går ud på at placere en kugle uden om ethvert punkt i S, og dernæst tage foreningen af disse kugler. Denne forening vil vi kalde $S(r)$, og der vil gælde, at $S \subseteq S(r)$.

Sætning 2.2.1. *Volumet* (vol) *af den n-dimensionale bold $B^n(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ er givet ved*

$$\mathrm{vol}\big(B^n(0,r)\big) = \gamma(n) r^n$$

hvor $\gamma(n) = 2\frac{\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$.

Bevis: Vi betragter Γ-funktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} \;\mathrm{d}t, x \geq 0$$

Ved partiel integration fås $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Volumet af $B^n(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ hhv. $S^{n-1}(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ findes:

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^n \;\mathrm{d}r$$

Ved substitution med $t = r^2$ fås

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t} r^n \;\mathrm{d}r &= \int_0^\infty e^{-t} t^{n/2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \;\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{n/2-1/2} \;\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{(n-1)/2} \;\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Gamma\big(\tfrac{n+1}{2}\big)\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Gamma\big(\tfrac{n+1}{2}\big)\mathrm{Vol}\big(S^n(0,1)\big) &= \int_0^\infty e^{-r^2} r^n \mathrm{Vol}\big(S^n(0,1)\big) \;\mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2} \mathrm{Vol}\big(S^n(0,1)\big) \;\mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)} \;\mathrm{d}(x_1 \cdots x_{n+1}) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \;\mathrm{d}x\right)^{n+1} \\ &= \big(\sqrt{\pi}\big)^{n+1}\end{aligned}$$

Af ovenstående ses det at volumet af enhedssfæren i $\mathbb{R}^{n+1}$ bliver

$$\mathrm{Vol}\big(S^n(0,1)\big) = 2\frac{\big(\sqrt{\pi}\big)^{n+1}}{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}$$

og dermed er volumet af den $n+1$-dimensionale sfære med radius r givet ved

$$\mathrm{Vol}\big(S^n(0,r)\big) = 2\frac{(\sqrt{\pi})^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}r^n = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}r^n$$

mens volumet af bolden med radius r bliver

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\big(B^n(0,r)\big) &= \int_0^r \mathrm{Vol}\big(S^{n-1}(0,r)\big)\ \mathrm{d}r \\
&= \mathrm{Vol}\big(S^{n-1}(0,1)\big) \int_0^r r^{n-1}\ \mathrm{d}r \\
&= \mathrm{Vol}\big(S^{n-1}(0,1)\big)\tfrac{1}{n}r^n \\
&= 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}r^n
\end{aligned}$$

Så findes der en bold $B^d(0,r) \in r^n$ hvor $n \geq 0$, som vil have et volumen givet ved

$$\mathrm{Vol}\big(B^n(0,r)\big) = \gamma(n)r^n$$

hvor $\gamma(n) = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ er en konstant, hvilket var det der skulle vises.

□

Eksempel 2.2.2. Sætning 2.2.1 kan bruges til eftervise de volumer, vi normalt tillægger intervaller, cirkler og bolde

- For $n=1$ fås $\mathrm{Vol}\big(B^1(0,r)\big) = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}r^1 = 2r$.
- For $n=2$ fås $\mathrm{Vol}\big(B^2(0,r)\big) = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{2\Gamma(\frac{2}{2})}r^2 = \pi r^2$.
- For $n=3$ fås $\mathrm{Vol}\big(B^3(0,r)\big) = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^3}{3\Gamma(\frac{3}{2})}r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

2.3 Topologisk dimension

For at tillægge et vilkårligt topologisk rum X en dimension, taler man om den topologiske dimension, benævnt med $\dim_T X$. Den topologiske dimension antager kun heltallige værdier, hvilket ikke er tilstrækkeligt, når vi ønsker at tillægge fraktaler en dimension, hvor vi har brug for at udvide dimensionsbegrebet til også skal omhandle reelle tal. Vi tillader at den topologiske dimension kan være negativ, hvilket fører os frem til følgende definition

Definition 2.3.1. *Lad X være et topologisk rum. Da definerer vi $\varnothing$ til at være den eneste mængde med topologisk dimension -1. Endvidere siger vi om en mængde $X \neq \varnothing$ at $\dim_T X = 0$ hvis der for alle $x \in X$ og alle åbne omegne $X \supseteq U \ni x$ findes en åben omegn $V \ni x$, således at $V \subseteq U$ og $\partial V = \varnothing$.*

Eksempel 2.3.2. Et diskret topologisk rum $X \neq \varnothing$ har $\dim_T X = 0$. Lad nemlig $x \in X$. For en åben omegn $U \ni x$ kan vi vælge $V = \{x\}$, der både er åben og afsluttet (da X er diskret). Da er $\partial V = \overline{V} \setminus V^\circ = V \setminus V = \varnothing$, så $\dim_T X = 0$.

Eksempel 2.3.3. Der gælder at $\dim_T \mathbb{Q} = 0$, når $\mathbb{Q}$ opfattes som delrum af $\mathbb{R}$ med den sædvanlige topologi. Lad nemlig $r \in \mathbb{Q}$, og lad $\mathbb{Q} \supseteq U \ni r$ være en åben omegn. Da kan vi finde et åbent interval V med irrationale endepunkter, så $r \in V \subseteq U$, dvs. $\partial V = \varnothing$. Dermed er $\dim_T \mathbb{Q} = 0$.

Eksempel 2.3.4. Om Cantor-mængden C (jvf. afsnit 2.5.3) gælder at $\dim_T C = 0$. C er fællesmængden af af dalende følge $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$, hvor C_k er en forening af 2^k disjunkte afsluttede intervaller af længde $\left(\frac{1}{3}\right)^k$. Lad nu $C \supseteq U \ni X$ være en åben omegn. Vi vælger nu $k = k_0$ tilpas stor således, at det interval I i C_{k_0}, der indeholder x, er indeholdt i U. Vi vælger yderligere den åbne omegn $C \supseteq V \ni x$, således at $I \subseteq V$ og V ikke overlapper med de andre intervaller i C_{k_0}, dvs. $V \cap C_{k_0} = I$. Da er $\partial V = \varnothing$, og dermed er $\dim_T C = 0$.

Definition 2.3.5. *Lad X være et topologisk rum og $n \in \mathbb{N}$. Da er $\dim_T X \leq n$ hvis og kun hvis der for alle $x \in X$ og alle åbne omegne $X \supseteq U \ni x$, findes en åben omegn $V \ni x$, således at $V \subseteq U$ og $\dim_T \partial V \leq n - 1$.*

En konsekvens af Definition 2.3.5 er, at $\dim_T X = n$ hvis og kun hvis $\dim_T X \leq n$ og $\dim_T X \not\leq n - 1$. Der gælder heldigvis følgende sætning

Sætning 2.3.6. *Den topologiske dimension af $\mathbb{R}$ er 1.*

Bevis: Vi viser først at $\dim_T \mathbb{R} \leq 1$. Lad $x \in U \subseteq \mathbb{R}$, hvor U er en åben omegn af x. Da findes et åbent interval V så $x \in V \subseteq U$. Da er $\partial V \neq \varnothing$ diskret, så $\dim \partial V = 0$, og dermed er $\dim_T \mathbb{R} \leq 1$.
Herefter viser vi, at $\dim_T \mathbb{R} \not\leq 1$. Da $\mathbb{R} \neq \varnothing$ er $\dim_T \mathbb{R} \neq -1$. Vi antager for at opnå en modstrid, at $\dim_T \mathbb{R} = 0$. Tager vi nu $x = 0$ og omegnen $U =]-1, 1[$, så findes der en åben omegn V indeholdt i U, så $0 \in V$ og $\partial V = \varnothing$. Dermed er V også afsluttet idet $\overline{V} = V \cup \partial V = V$. Hermed må $V = \varnothing$ eller $V = \mathbb{R}$ da $\varnothing$ og $\mathbb{R}$ er de eneste delmængder af det sammenhængende topologiske rum $\mathbb{R}$, der både er åbne og afsluttede, hvilket giver den ønskede modstrid.

□

Ved at argumentere på samme måde som i beviset for sætning 2.3.6, får vi at ethvert interval $\varnothing \neq I \subseteq \mathbb{R}$ har $\dim_T I = 1$, hvor I er sammenhængende. Enhver kurve, som er et homeomorft billede af et interval, har derfor også topologisk dimension 1.

Eksempel 2.3.7. $\dim_T K = 1$, hvor K er Kochs kurve, jvf. afsnit 2.5.2.

Sætning 2.3.8. *Lad $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^n$, og lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være kompakt. Da gælder følgende*

- *Den topologiske dimension er en topologisk invariant.*
- $\dim_T \mathbb{R}^n = n$
- $\dim_T X \leq \dim_T Y$
- $\dim_T A = 0$ *hvis og kun hvis A er totalt usammenhængende, dvs. sammenhængskomponenterne er et-punktsmængder.*

2.4 Hausdorff dimension

Hausdorffs definiton af fraktal dimension [Fal90], er baseret på en konstruktion af Carathéodory. Denne definition bygger på grundlæggende målteori og har den fordel, at den er defineret på enhver mængde. Vi er derfor nødt til først at definere, hvad vi mener med Hausdorff målet.

2.4.1 Hausdorff mål

Lad U være en ikke-tom n-dimensional delmængde af $\mathbb{R}^n$, hvor diameteren til U er defineret ved $|U| = \sup\{|x-y| \mid x, y \in U\}$. Hvis $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ er en tællelig forening af mængder, som har diameter højest δ, der overdækker F, dvs. at $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ med $0 < |U_i| \leq \delta$ for alle i, så kalder vi $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ for en δ-overdækning af F.

Lad $F \subseteq \mathbb{R}^n$ og s er et ikke-negativt tal. Da definerer vi for alle $\delta > 0$

$$H_\delta^s(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \;\middle|\; \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ er en } \delta\text{-overdækning af } F \right\} \tag{2.2}$$

Vi betragter altså alle δ-overdækninger af F og ønsker at minimere summen af den s'te potens af diametrene. Når δ går mod nul, vil mængden af de tilladte overdækninger af F i ligning (2.2) blive mindre. Derfor vil $H_\delta^s(F)$ være en voksende funktion og nærme sig en grænse, når $\delta \to 0$. Vi får at

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(F) \tag{2.3}$$

Det ved ligning (2.3) definerede mål, kaldes Hausdorff målet.

Sætning 2.4.1. *Da H^s er et mål, opfylder det følgende betingelser*

(1) $H^s(\varnothing) = 0$

(2) $E \subseteq F \Rightarrow H^s(E) \leq H^s(F)$

(3) (F_i) følge af disjunkte Borelmængder $\Rightarrow H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i)$

Dette mål skal stemme overens med de mål, vi allerede tillægger kendte mængder, som fx. intervaller, cirkler og bolde, der er mål på delmængder af hhv. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$. Hausdorff målet på disse mængder er ækvivalent til det volumen, der er beskrevet i Eksempel 2.2.2.

Sætning 2.4.2. *Lad $F \subseteq \mathbb{R}^n$ være en Borelmængde, og lad H^d være Hausdorff målet på F. Da er*

$$H^n(E) = \gamma(n)\mathrm{Vol}^n(F),$$

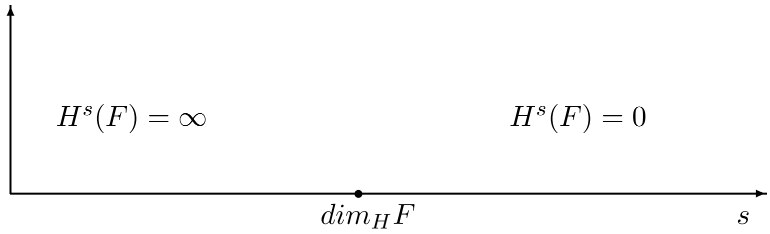
hvor $\gamma(n) = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$.

2.4.2 Hausdorff dimension

For at kunne definere Hausdorff dimensionen af en mængde, betragter vi ligning (2.2). For en given mængde F og $\delta < 1$, vil $H_\delta^s(F)$ være en ikke-voksende funktion af s, og dermed vil $H^s(F)$ heller ikke være aftagende ifølge ligning (2.3). Hvis U_i er en δ-overdækning af F, og at $t > s$ har vi

$$\sum_{i=1} |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1} |U_i|^s \tag{2.4}$$

Ved at tage infimum på begge sider af ligning (2.4) fås $H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$. Lader vi δ gå imod 0, så er $H^t(F) = 0$ hvis $H^s(F) < \infty$. Der vil være netop et tal s hvor $H^s(F)$ springer fra ∞ til 0, og dette tal kaldes Hausdorff dimensionen af F og betegnes $\dim_H F$.



Figur 2.1: Hausdorff dimensionens entydighed illustreret

Sætning 2.4.3.

$$\dim_H F = \inf\left\{s \mid H^s(F) = 0\right\} = \sup\left\{s \mid H^s(F) = \infty\right\} \tag{2.5}$$

hvor

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{for } s < \dim_H F \\ 0 & \text{for } s > \dim_H F \end{cases}$$

Hvis $\dim_H F = s$*, vil der gælde for* $H^s(F)$ *at* $0 < H^s(F) < \infty$*.*

2.5 Eksempler på fraktaler

En type af fraktaler kaldes geometriske fraktaler, hvor de mest velkendte er Sierpinskis trekant, Kochs snefnugskurve samt Cantor-mængden. Det karakteristiske ved disse er, at de er selv-similære, og at de er forholdsvis lette at konstruere.

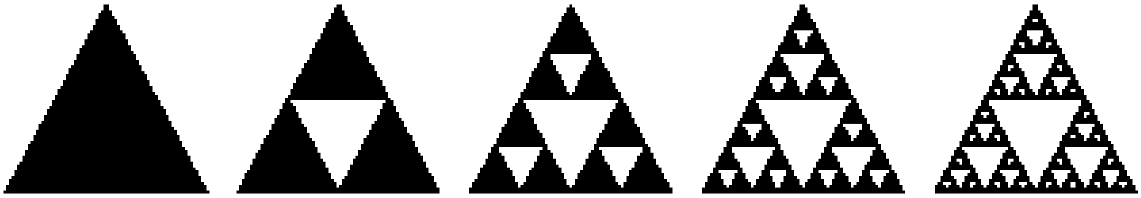
2.5.1 Sierpinskis trekant

Vi betragter en ligesidet trekant med sidelængden h, og betragter dette som trin 0. Trin 1 består i at dele trekanten op i 4 ligesidede trekanter – hver med sidelængderne $\frac{h}{2}$, hvorefter den midterste fremkomne trekant fjernes. Næste trin består nu i at betragte de tre fremkomne nye trekanter med siden $\left(\frac{1}{2}\right)^2 h$, som igen deles op i 4 ligesidede trekanter, hvor den midterste igen fjernes. Således kan man fortsætte i det uendelige, og derved fremkommer Sierpinskis trekant. På figur 2.2 ses trin 0 til 4 illustreret.

Sierpinskis trekant er opkaldt efter den polske matematiker Sierpinski. En af de fantastiske egenskaber ved Sierpinskis trekant er, at hvis man betragter en af de fremkomne trekanter fra trin 1, og forstørrer linierne til dobbelt størrelse vil man genskabe en tro kopi af Sierpinskis trekant. Dette kan også mere generelt udtrykkes ved, at hvis vi forstørrer trekanterne ved trin n med en faktor $2n$, så fås en nøjagtig kopi af Sierpinskis trekant. Figurer, der har denne egenskab, at helheden genfindes i detaljen og omvendt kaldes selv-similære.

2.5.2 Kochs snefnugskurve

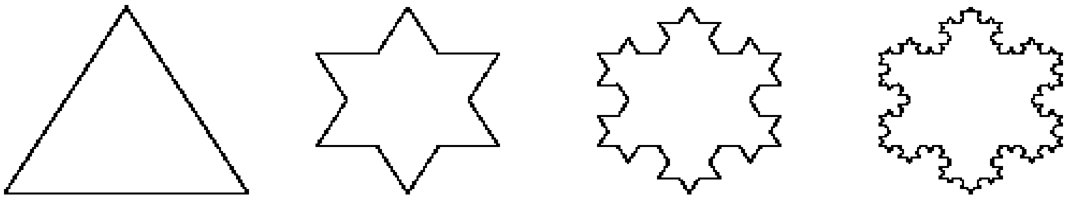
Vi betragter en ligesidet trekant med sidelængden h, hvor $h > 1$, og betragter dette som trin 0. Trin 1 består i at vi fra hver af siderne fjerner den midterste tredjedel, som erstattes med to liniestykker af længden $\frac{h}{3}$ der sammen med den fjernede del vil danne en ligesidet



Figur 2.2: Sierpinski

trekant. Herved fremkommer en ny figur med 3 gange 4, altså 12 liniestykker. Fortsættes i det uendelige fremkommer Kochs snefnugskurve, og trin 0 til 3 ses illustreret på figur 2.3. På det n'te trin vil Kochs snefnugskurve bestå af 3 gange $4n$ liniestykker, og længden af disse stykker vil være $(\frac{h}{3})^n$. Derved vil omkredsen blive $O_n = 3 \cdot 4^n \cdot (\frac{h}{3})^n = 3 \cdot (\frac{4h}{3})^n$. Da $\frac{4h}{3} \cdot \frac{4h}{3} > 1$ vil $O_n \to \infty$ for $n \to \infty$ hvorved omkredsen af Kochs snefnug bliver uendelig, mens arealet er begrænset.

Kochs snefnugskurve er opkaldt efter den svenske matematiker Helge von Koch, der introducerede denne i 1904. Denne er ligesom Sierpinskis trekant selv-similær, hvor det bemærkes, at det er randen og ikke det afgrænsede område, der er selv-similær.



Figur 2.3: Kochs snefnug

2.5.3 Cantor-mængden

Vi betragter intervallet $[0, 1]$ som trin 0. I det første trin fjernes den midterste tredjedel, altså intervallerne $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, så vi har $[0, \frac{1}{3}]$ og $[\frac{2}{3}, 1]$ tilbage. Næste trin består i, at vi fra hver af disse intervaller igen fjerner den midterste tredjedel, så vi får de 4 intervaller: $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ og $[\frac{8}{9}, 1]$. Fortsættes i det uendelige fremkommer Cantor-mængden, og trinene 0 til 4 ses illustreret på figur 2.4. Efter n iterationer vil der være $2n$ intervaller, der alle har længden 3^{-n}, og længden af disse intervaller $(\frac{2}{3})^n \to 0$ for $n \to \infty$. Cantor-mængden er opkaldt efter Cantor og igen bemærkes det, at der er tale om en selv-similær figur.

Figur 2.4: Cantor-mængden

2.6 Dimension af selv-similære mængder

2.6.1 Selv-similære mængder

Et oplagt eksempel på en figur, der er selv-similær, er en terning i $\mathbb{R}^3$. Vi starter med en terning med sidelængden n, og deler denne op i n^3 lige store terninger, dvs. med sidelængder $\frac{1}{n}$ af den oprindelige terning. For at komme tilbage til den oprindelige terning, skal vi altså forstørre de små terninger n gange, så vi har et forhold $1 : n$ mellem de store og små terninger. Hvis vi betegner antallet af små figurer med k, og dimensionen med D får vi at

$$n^D = k \Leftrightarrow D \log n = \log k \Leftrightarrow D = \frac{\log k}{\log n} \tag{2.6}$$

Det vil sige, at vi i tilfældet med terningen får, at dimensionen er 3, men det interessante ved ligning (2.6) er at dimensionerne kan antage reelle værdier. Mere generelt vil der gælde

Definition 2.6.1. *Dimensionen D af en selv-similær mængde er bestemt ved*

$$D = \frac{\log(\text{antal små dele i næste trin})}{\log(\text{forstørrelsesfaktor fra lille til stor del})}$$

Definition 2.6.1 kan bruges til at finde dimensionen af en selv-similær mængde, hvis denne er konstrueret, så man kender forholdet n og k. En anden måde man kan finde dimensionen på, er ved at definere $S_1, \ldots, S_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som er similære, dvs. at $|S_i(x) - S_i(y)| = r_i|x - y|$, hvor $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $0 < r_i < 1$ for alle $i = 1, \ldots, m$. Hvert af S_i'erne transformerer delmængder af $\mathbb{R}^n$ til geometrisk similære mængder. En mængde, der er invariant under disse betingelser af similaritet, kaldes *selv-similær*. Mængden $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er altså selv-similær hvis

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} S_{r_i}(A)$$

for passende $0 < r_1, \ldots, r_m \leq 1$ og $m \geq 1$. Under visse betingelser gælder at Hausdorff dimensionen $s = \dim_H A$ opfylder

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1 \tag{2.7}$$

Endvidere vil der gælde, at A har et positivt og endeligt Hausdorff mål. Vi behøver en betingelse, så komponenterne af $S_i(A)$ til A ikke overlapper, så vi siger, at S skal opfylde 'åben mængde-betingelsen', dvs. der eksisterer en ikke-tom, begrænset og åben mængde V så

$$V \supseteq \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \tag{2.8}$$

som er en disjunkt forening.

Der gælder imidlertid følgende sætning af P.A.P. Moran:

Sætning 2.6.2. *Lad $E \subseteq \mathbb{R}^n$ være en kompakt delmængde konstrueret på følgende måde: Lad O_1 være en åben delmængde, og lad O_2^i for $i = 1, \ldots, m$ være ikke-overlappende delmængder af O_1 som er similære med O_1, men reduceret i forholdet r_i. Lad tilsvarende O_3^{ij} for $j = 1, \ldots, m$*

være ikke-overlappende delmængder af O_2^i *som er similære med* O_2^i*, men reduceret i forholdet* r_i*. Fortsætter vi således får vi konstrueret en følge* $O_1, \bigcap_{i=1}^m O_2^i, \bigcap_{j=1}^m O_3^{ij}, \ldots,$ *og vi lader* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ *være følgen af de tilsvarende afsluttede delmængder. For* $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k$ *gælder da at*

$$\dim_H E = s$$

hvor

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$$

2.6.2 Boks dimension

Vi har defineret Hausdorff dimensionen, som kan bruges til at bestemme, om en given mængde er en fraktal ved at benytte Definition 2.1.1. Hausdorff dimensionen kan være ret svær at bestemme, så derfor indfører man et andet dimensionsbegreb, den såkaldte boks dimension, der i visse tilfælde stemmer overens med Hausdorff dimensionen.

Definition 2.6.3. *Lad* $F \subseteq \mathbb{R}^n$ *være en ikke-tom begrænset delmængde, og lad* $N_\delta(F)$ *være det mindste antal mængder med diameter højst* δ *som overdækker* F*. Da vil boks dimensionen* $\dim_B F$ *af* F *være givet ved*

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log\big(N_\delta(F)\big)}{-\log(\delta)}$$

Sætning 2.6.4. *Lad den åbne mængde defineret i ligning (2.8) gælde for similære* S_i *på* $\mathbb{R}^n$ *med radius* r_i $(i = 1, \ldots, m)$*. Hvis* F *er en invariant delmængde der opfylder at*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$$

så vil $\dim_H F = \dim_B F = s$*, hvor* s *er givet ved*

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$$

Endvidere vil der gælde for værdien af s *at* $0 < H^s(F) < \infty$*.*

Eksempel 2.6.5. ***Cantor-mængden***
Fra Sætning 2.6.4 kan vi finde dimensionen for Cantor-mængden. Vi har at $m = 2$ og $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$. Vi får da at

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^s + \left(\tfrac{1}{3}\right)^s = 1 \Rightarrow \left(\tfrac{1}{3}\right)^s = \tfrac{1}{2} \Rightarrow s \log \tfrac{1}{3} = \log \tfrac{1}{2} \Rightarrow s = \tfrac{\log 2}{\log 3}$$

Eksempel 2.6.6. ***Kochs kurve modificeret***
Kochs kurve kan modificeres ved kun at betragte en af siderne h i den ligesidede trekant. Lad $0 < a \leq \frac{1}{3}$ og konstruer en kurve F ved gentagne gange at fjerne den minderste del a, som erstattes med to liniestykker af længden a, der sammen med den fjernede del, vil danne en ligesiddet trekant. Da vil $\dim_H F = \dim_B F$ være løsning til $2a^s + 2\big(\frac{1}{2}(1-a)\big)^s = 1$. For $a = \frac{1}{3}$ bliver

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^s + \left(\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{3})\right)^s = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{3}\right)^s + \left(\tfrac{1}{3}\right)^s = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{3}\right)^s = \tfrac{1}{4} \Rightarrow s = \tfrac{\log 4}{\log 3}$$

2.7 Fraktaler med Hausdorff dimension ml. 0 og 1

Vi vil i dette afsnit vise, at der findes fraktaler med dimension D for ethvert $D \in]0,1]$, og vi betragter hertil en generalisering af Cantor-mængden. Vi betragter stadig intervallet $[0,1]$, men i stedet for at fjerne den midterste tredjedel, fjerner vi den midterste ξ'te-del hvor $\xi > 1$. Vi betragter altså intervallet $P_0 = [0,1]$ som trin 0. I det første trin fjernes den midterste ξ'te-del, altså intervallet $]\frac{\xi-1}{2\xi}, \frac{\xi+1}{2\xi}[$, så vi har $[0, \frac{\xi-1}{2\xi}]$ og $[\frac{\xi+1}{2\xi}, 1]$ tilbage, og vi kalder foreningen af disse intervaller for P_1. Næste trin består i, at vi fra hver af disse intervaller igen fjerner den midterste ξ'te-del, og foreningnen af disse kalder vi P_2, etc. Vi sætter

$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n$$

og bemærker at intervallængden af de fremkomne intervaller i det første trin bliver

$$\frac{\xi - 1}{2\xi} = \frac{1 - 1/\xi}{2}$$

Vi kan finde Hausdorff dimensionen D af P som i Eksempel 2.6.5, altså ved brug af Sætning 2.6.4. Vi har at $m = 2$ og $r_1 = r_2 = \frac{1-1/\xi}{2}$, dvs. vi har ligningen

$$2\Big(\frac{1 - 1/\xi}{2}\Big)^D = 1$$

Ved at løse denne mht. D finder vi at

$$D = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{2}{1-1/\xi}\right)} = \frac{\log 2}{\log 2 - \log\left(\frac{\xi-1}{\xi}\right)}$$

så da $\xi > 1$ har vi at

$$0 < D < 1$$

D kan antage alle værdier i intervallet $]0,1[$. Da D er en kontinuert funktion af ξ, følger det ønskede, da $D \to 0$ for $\xi \to 1^+$ og $D \to 1$ for $\xi \to \infty$. Da $\dim_T P = 0$ er P en fraktal, som indses ved samme argumentation som ved Cantor-mængden. Vi har altså nu realiseret fraktaler med Hausdorff dimension $D \in]0,1[$.

For at vise, at der findes fraktaler med Hausdorff dimension $D = 1$, kan vi tage produktet af to (generaliserede) Cantor-mængder, og heraf få en delmængde af $\mathbb{R}^2$ med Hausdorff dimension 1 og topologisk dimension 0, hvoraf vi får en fraktal.

Kapitel 3

Holomorf dynamik

Af Rune Odin og ???

3.1 Julia-mængder

Vi skal i dette kapitel beskæftige os med en bestemt familie af komplekse polynomier og dynamikken af disse. Dvs at vi for et $z \in \mathbb{C}$ og et komplekst polynomium F skal se hvorledes følgen z, $F(z)$, $F(F(z))$, ... opfører sig.

Lemma 3.1.1. *Lad $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være et komplekst normeret polynomium af grad n,*
$F(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, n$.
Da findes et, til F konjugeret, polynomium $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, af grad n med $(n-1)$'te-gradskoefficient lig 0, dvs $f(z) = z^n + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0$, $b_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, n$.

Bevis: For $F(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ benytter vi nu $h(z) = z + \frac{1}{n}a_{n-1}$, og får

$(h \circ F \circ h^{-1})(z) =$
$\left(z - \frac{1}{n}a_{n-1}\right)^n + a_{n-1}\left(z - \frac{1}{n}a_{n-1}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(z - \frac{1}{n}a_{n-1}\right) + a_0 + \frac{1}{n}a_{n-1}$.
$(N-1)$'te-gradskoefficienten bliver nu $n\left(-\frac{1}{n}a_{n-1}\right) + a_{n-1} = 0$
og vi er færdige. □

Vi skal i det følgende udelukkende koncentrere os om polynomier af grad 2, som vi, jvf lemmaet, kan antage er uden 1.-gradsled, dvs polynomier af typen $z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$.

Definition 3.1.2. *For et $c \in \mathbb{C}$ definerer vi nu f_c ved $f_c(z) = z^2 + c$.*
Disse polynomier udgør 'den kvadratiske familie'.

Definition 3.1.3. *Lad f_c være et polynomium i den kvadratiske familie.*
Julia-mængden for f_c defineres ved $J(f_c) = \partial\{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} f_c^{(n)}(z) = \infty\}$,
den udfyldte Julia-mængde for f_c ved $K(f_c) = \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} f_c^{(n)}(z) \neq \infty\}$
og det tiltrækkende bassin for ∞ ved $A(\infty) = A_{f_c}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} f_c^{(n)}(z) = \infty\}$.

Eksempel 3.1.4. *Betragt $f_0 = z^2$. Da $|f_0(z)| = |z|^2$ og $f_0^n(z) = z^{2^n}$, får vi at*
$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} |z|^{2^n} = \infty\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$,
$K(f_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} |z|^{2^n} \neq \infty\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ *og dermed*
$J(f_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Sætning 3.1.5. *Lad f_c være et polyomium i den kvadratiske familie.
Da er $J(f_c)$, $K(f_c)$ og $A(\infty)$ fuldstændigt f_c-invariante, dvs*
$f_c(J(f_c)) = J(f_c) = f_c^{-1}(J(f_c))$.

Bevis: Vi beviser her blot sætnigen for $A(\infty)$.
$z \in A(\infty) \Leftrightarrow f_c^{n+1}(z) \to \infty,\ n \to \infty \Leftrightarrow f_c^{n}(f_c(z)) \to \infty,\ n \to \infty \Leftrightarrow f_c(z) \in A(\infty)$. □

Sætning 3.1.6. *Lad $f_c(z) = z^2 + c$, $|c| < 2$. Hvis $|z_n| = |f_c^{(n_0)}(z)| \geq 2$ for $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ på noget tidspunkt kommer udenfor cirklen med radius 2, vil $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ så $z \notin J(f_c)$.*

Bevis: Det kan uden problemer antages, at for $n_0 = 1$ er $|z_{n_0}| = |z| \geq 2$.
Da er

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|\left(|z| - \frac{|c|}{|z|}\right) \tag{3.1}$$

$$\geq |z|\left(2 - \frac{|c|}{2}\right). \tag{3.2}$$

Vi definerer nu $\delta = \frac{|c|}{2} - 1$. Ved at se på funktionen $\phi(x) = x - \frac{|c|}{x}$ og finde den afledede $\phi'(x) = 1 + \frac{|c|}{x^2} \geq 1$, ses at for $x \geq 2$ er $\phi(x) \geq \phi(2)$. Dermed må

$$|z|\left(|z| - \frac{|c|}{|z|}\right) \geq |z|\left(2 - \frac{|c|}{2}\right) \geq |z|(1+\delta) \tag{3.3}$$

og $|f_c(z)| \geq (1+\delta)|z|$, så $|f_c^{(2)}(z)| \geq (1+\delta)|f_c(z)| \geq (1+\delta)^2|z|$ Ved iteration fås da $|z_n| = |f_c^{(n)}(z)| \geq (1+\delta)^n|z|$, og dermed vil $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. □

Vi skal nu lave en karakterisering af Juliamængderne, og til det skal vi bruge en beskrivelse af periodiske punkter.

Definition 3.1.7. *$z \in \mathbb{C}$ kaldes et p-periodisk punkt, hvis $f^p(z) = z$. Lad $\lambda = (f^{(p)})'(z)$. Vi siger, at det periodiske punkt z er*
supertiltrækkende *hvis $\lambda = 0$,*
tiltrækkende *hvis $|\lambda| < 1$,*
neutralt *hvis $|\lambda| = 1$ og*
frastødende *hvis $|\lambda| > 1$.*

Definition 3.1.8. *Hvis w er et tiltrækkende eller supertiltrækkende fixpunkt definerer vi* det tiltrækkende bassin for *w, $A(w)$ på følgende måde:*

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} | f^{(n)}(z) \to w \quad for \quad n \to \infty\}$$

I denne definition tillader vi også punktet ∞ at indgå. Dynamikken i en omegn af ∞ kan undersøges ved at udskifte z med $1/z$ og $f(z)$ med $F(z) = 1/f(1/z)$, hvorved opførslen af f omkring ∞ transformeres over til opførslen af $F(z)$ omkring 0. Dette vises skematisk i følgende kommuterende diagram, hvor $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} \\ {\scriptstyle 1/z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1/z} \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{F} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

Der gælder at $z = 0$ er (super)tiltrækkende for $F(z)$ hvis ∞ er det for $f(z)$.

Eksempel 3.1.9. *Lad som eksempel* $f_c(z) = z^2+c$. $f_c(\infty) = \infty$. *Vi finder* $F(z) = 1/f(1/z) = \frac{z^2}{1+cz^2}$ *og* $F'(z) = \frac{2z}{(1+cz^2)^2}$, *og F'(0)=0, så* ∞ *er et supertiltrækkende fixpunkt for* $f_c(z)$.

Her kommer så karakteriseringen af Juliamængderne:

Sætning 3.1.10. *Lad* f *være et polynomium af grad* ≥ 2. *Da gælder*

1. $J(f)$ *er randen af det tiltrækkende bassin for ethvert tiltrækkende fikpunkt* w. *Altså* $J(f) = \partial A(w)$.
2. *Alle frastødende periodiske punkter er i* $J(f)$ *og* $J(f) = cl\{$*frastødende periodiske punkter*$\}$; *de frastødende periodiske punkter ligger tæt i* $J(f)$.
3. *Hvis* $w \in J(f)$ *(f.eks. et frastødende punkt) så er* $J(f) = cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(w)\right)$

Beviset for denne sætning anvender kompleks analyse, herunder normale familier og Montels sætning. Som et eksempel på anvendelsen af dette resultat skal vi se på $f_0(z) = z^2$:

Eksempel 3.1.11. $f_0(z) = z^2$; $f_0^n(z) = z^{2^n}$. *Vi finder ifølge 1), at* $A(\infty) = \{|z| > 1\}$, $J(f_0(z)) = \partial\{|z| > 1\} = S^1$. *Men vi finder også* $A(0) = \{|z| < 1\}$ *og derfor* $J(f_0(z)) = \partial\{|z| < 1\} = S^1$
2) giver at for et n-periodisk punkt $w \neq 0$ *(dvs. et fixpunkt for* $f_0^n(z) = z^{2^n}$*) at* $w^{2^n-1} = 1$. *Foreningsmængden af disse frastødende (overvej!) periodiske punkter udgør* S^1 *i overensstemmelse med 1).*

3.2 Mandelbrotmængden

Når vi ser på Julia-mængder for forskellige c, kan de deles i to klasser efter hvorvidt 0 er indeholdt i den udfyldte Julia-mængde eller ej. Dette definerer netop Mandelbrotmængden $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} | c \in K(F_c)\} = \{c \in \mathbb{C} | \lim_{n\to\infty} f_c^{(n)}(0) \neq \infty\}$$

Der findes et par andre, ækvivalente definitioner af Mandelbrotmængden:

Sætning 3.2.1. *Følgende er ækvivalente definitioner af Mandelbrotmængden:*

1. $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} | \{f_c^n(0)\}_{n=1,2,\ldots}$ *er begrænset*$\}$ *eller mere præcist*
   $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} | \exists r > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |f_c^n(0)| < r\}$
2. $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} |\ |f_c^n(0)| \leq 2$ *for alle* $n = 1, 2, \ldots\}$

Bemærkning 3.2.2. *Af den sidste betingelse ses, at* $\mathcal{M}$ *er indeholdt i* $\{z||z| \leq 2\}$ *og dermed begrænset.*

Bevis: Vi viser først, at den oprindelige definition er ækvivalent med 1. i ovenstående. At 1. er indeholdt i den oprindelige definition er oplagt. Antag for at vise den anden inklusion, at $f_c^n(0)$ ikke er begrænset. Afhængigt af c findes et $R \in \mathbb{R}$, så

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| > 2|z|$$

når $|z| > R$ (overvej!). Men da følgen $\{f_c^n(0)\}$ er ubegrænset findes et m, så $|f_c^m(0)| > R$, og så er

$$|f_c^{m+1}(0)| = |f_c(f_c^m(0))| > 2|f_c^m(0)| > R$$

og dermed ved induktion

$$|f_c^{m+k}(0)| > 2^k |f_c^m(0)| \to \infty \quad \text{for} \quad k \to \infty$$

så $c \notin \{c \in \mathbb{C} | f_c^n(0) \not\to \infty \text{ for } n \to \infty\}$. For at vise at 2. er ækvivalent med den oprindelige definition, bemærker vi først, at det er oplagt, at 2. er indeholdt i den oprindelige definition. For at vise det modsatte, deler vi op i to tilfælde:

1. $|c| \leq 2$ og $c \notin 2$.
2. $|c| > 2$ og $c \notin 2$.

At disse to tilfælde begge fører til, at $c \notin \mathcal{M}$ i henhold til den oprindelige definition, følger af følgende to lemmaer. □

Lemma 3.2.3. *Antag at* $|c| \leq 2$*. Hvis* $|f_c^n(0)| > 2$ *for et* $m \geq 1$ *så vil* $f_c^n(0) \to \infty$ *for* $n \to \infty$*.*

Bevis: Antag at $|f_c^m(0)| = 2 + \delta$ hvor $\delta > 0$. Så er

$$\begin{aligned} |f_c^{m+1}(0)| &= |(f_c^m(0))^2 + c| \geq |f_c^m(0)|^2 - |c| = (2+\delta)^2 - |c| \\ &\leq (2+\delta)^2 - 2 = 2 + \delta^2 + 4\delta > 2 + 4\delta \end{aligned}$$

og ved iteration af dette fås $|f_c^{m+k}(0)| \geq 2 + 4^k\delta$, så $f_c^{m+k} \to \infty$ for $k \to \infty$. □

Lemma 3.2.4. *Antag at* $|c| > 2$*. Da vil* $f_c^n(z) \to \infty$ *for alle* z *med* $|z| \geq |c|$*. Specielt vil* $f_c^{n+1}(0) = f_c^n(c) \to \infty$ *for* $n \to \infty$*.*

Bevis: Antag $|c| > 2$ og $|z| \geq |c|$. Da vil

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) \\ &\geq |z|(|c| - 1) \end{aligned}$$

så ved iteration findes $|f_c^m(z)| \geq |z|(|c|-1)^m \to \infty$ for $n \to \infty$. □

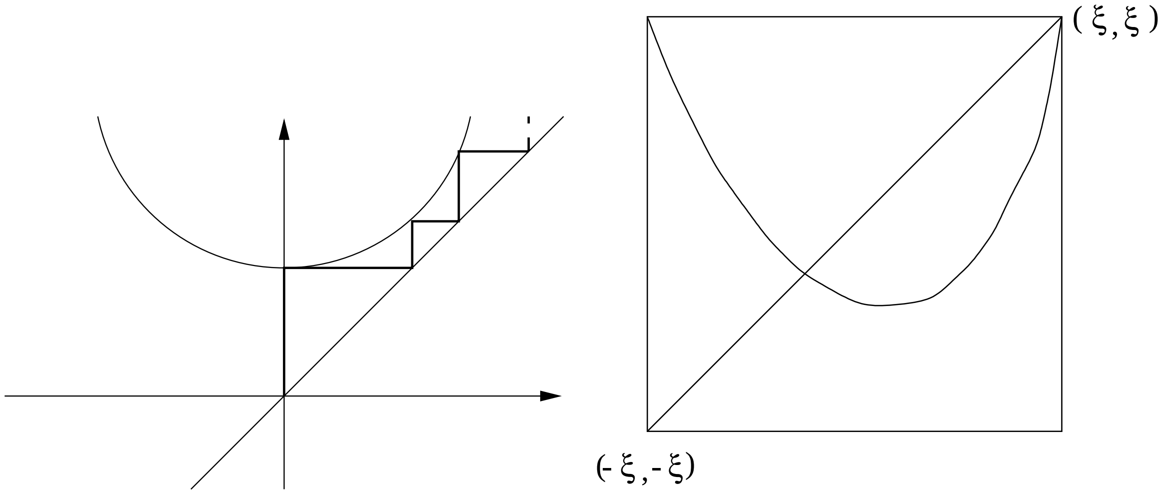
Sætning 3.2.5. $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} = [-2; \frac{1}{4}]$.

Bevis: Det følger af lemma (3.2.4), at $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} \subseteq [-2; 2]$. Antag nu, at $c > \frac{1}{4}$. Så har $f_c(z) - z = z^2 - z + c$ ingen reelle rødder; de er nemlig $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$, så det ses nemt (se figur 3.1(a)) , at $f_c^n \to \infty$ for $n \to \infty$. Altså er $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} \subseteq [-2; \frac{1}{4}]$.
Omvendt gælder, når $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$, at polynomiet $f_c(x) - x$ har mindst én reel rod, ξ. Derfor vil $f_c([-\xi, \xi]) \subseteq [-\xi, \xi]$, og alle punkter i $[-\xi, \xi]$ vil have begrænsede baner (se figur 3.1(b)), og specielt vil 0 have begrænset bane. □

Definition 3.2.6. *En kurve* Γ *siges at være en* ottetalskurve*, hvis den krydser sig selv i netop ét punkt (*$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta) = \Gamma(\gamma) \ldots$*, for alle andre* $\mu, \nu \in \Gamma^{-1}(\Gamma)$ *gælder* $\Gamma(\mu) \neq \Gamma(\nu)$*).*

Lemma 3.2.7. *Hvis* Γ *er en glat simpel lukket kurve i planen og* $\Gamma_{-1} = f_c^{-1}(\Gamma)$*, gælder følgende for c i eller på* Γ*:*

1. *Hvis c ligger i det indre af* Γ*, er* Γ_{-1} *også en glat simpel lukket kurve, hvis indre bijektivt korresponderer med det indre af* Γ*.*



(a) (b)

Figur 3.1:

2. *Hvis c ligger på kurven Γ, er Γ_{-1} en glat ottetalskurve. Hvert af de indre områder af Γ_{-1} korresponderer bijektivt med det indre af Γ.*

Sætning 3.2.8 (Hovedsætningen om Mandelbrotmængden). *Mandelbrotmængden $\mathcal{M}$ er netop mængden af $c \in \mathbb{C}$, for hvilke Juliamængden $J(f_c)$ er sammenhængende. For alle punkter c i $\mathbb{C}\backslash\mathcal{M}$ er $J(f_c)$ usammenhængende.*

Bevis: Antag, at $c \in \mathcal{M}$. Da er $\{f_C^{(n)}(0)\}$ begrænset og vi kan vælge en cirkel Γ_0, så det for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at $f_c^{(n)}(0)$ ligger i det indre af Γ_0. Da $c = f_c(0)$, vil c så ligge i det indre af Γ_0. Lad $\Gamma_{-1} = f_c^{-1}(\Gamma_0)$. Ud fra lemma 3.2.7 fås, at f_c afbilder det indre af Γ_{-1} bijektivt på det indre af Γ_0. Da $f_c(c) = f_c^2(0)$ ligger i det indre af Γ_0, vil c ligge i det indre af Γ_{-1} såvel som i det indre af Γ_0. Denne proces kan itereres ved for ethvert $n \in \mathbb{N}$ at sætte $\Gamma_{-(n+1)} = f_c^{-1}(\Gamma_{-n})$, hvorefter lemmaet kan bruges for at finde $c \in \Gamma_{-n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Sæt så $K_{-n} = \Gamma_{-n} \cup$ (det indre af Γ_{-n}) og $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_{-n}$. Konstruktionen implicerer så, at ethvert punkt udenfor K itererer til ∞, altså at $A(\infty) = \mathbb{C}\backslash K$, så den udfyldte Juliamængde $K(f_c)$ er lig mængden K. Da K er fællesmængden for følgen $(K_{-n})_{n=0}^{\infty}$ af kompakte, sammenhængende mængder(følger af topologi), hvis komplementer er sammenhængende og hvor $k \geq l \Rightarrow K_{-k} \subseteq K_{-l}$, vil $K(f_c)$ være sammenhængende og mængdens rand, altså $J(f_c)$, vil det også.
Antag nu at $c \notin \mathcal{M}$, altså at $\{f_c^{(n)}(0)\}$ er ubegrænset. Lad Γ_0 være en cirkel, så det gælder at

(a) $\Gamma_{-1} = f_c^{-1}$ ligger i det indre af Γ_0

(b) Ethvert punkt udenfor Γ_0 itererer til ∞

(c) Der ekslsterer et $n_0 \in \mathbb{N}$, så $f_c^{(n_0-1)}(c) = f_c^{(n_0)}(0) \in \Gamma_0, n < n_0 \Rightarrow f_c^{(n_0)}(c)$ ligger i det indre af Γ_0 og $n > n_0 \Rightarrow f_c^{(n_0)}$ ligger udenfor Γ_0

Det er klart, at for en tilstrækkelig stor cirkel Γ_0 vil (a), (b) og (c) gælde.
Anden del af beviset starter (som første del) med at definere $\Gamma_{-(n+1)} = f_c^{-1}(\Gamma_{-n})$ for $n \in \mathbb{N}$.

På gr. af (c) vil vi finde c på kurven $\Gamma_{-(n_0-1)}$ i stedet for i dens indre. Ud fra lemma 3.2.7 ses da, at Γ_{-n_0} er en ottetalskurve. Da hvert område heri kan afbildes ind i det indre af $\Gamma_{-}n_0 - 1$, må hver af disse indeholde en ikke-tom delmængde af $J(f_c)$. Derfor må $J(f_c)$ være usammenhængende. □

Bemærkning 3.2.9. *Hovedsætningen om Mandelbrotmængden kan forstærkes, da man kan bevise, at for alle $c \notin \mathcal{M}$ vil $J(f_c)$ være totalt usammenhængende (hvis $a, b \in (A \cap J(f_c))$, hvor A er en sammenhængende mængde, så er $a = b$).*

Et par bemærkninger til slut.

Sætning 3.2.10 (Shishikua 1998). $dim_H(\partial\mathcal{M}) = 2$

Sætning 3.2.11. *For næsten alle $c \in \partial\mathcal{M}$ er $dim_H J(f_c) = 2$.*

Desuden ved man at Hausdorffdimensionen af Juliamængden ikke er kontinuert på randen af Mandelbrotmængden, men måske er den det på $\mathbb{C}\backslash\mathcal{M}$.

Sætning 3.2.12. *$\mathcal{M}$ er sammenhængende og $\mathbb{C}\backslash\mathcal{M}$ er homeomorf med $\{z||z| > 1\}$*

Man ved endnu ikke, om $\partial\mathcal{M}$ er lokalt sammenhængende.

Kapitel 4

Gödels ufuldstændighedssætninger

Afsnit 4.1, 4.2, 4.3.5 og 4.3.6 af Bodil Biering, afsnit 4.3.1 - 4.3.4 af Morten O. Hansen og afsnit 4.3.7 - 4.3.9 af Esben W. Lorenzen

Udviklingen af matematikken førte i begyndelsen af 1900-tallet til en komplet formalisering, forstået på den måde, at man havde fået konstrueret et formelt system hvori alle kendte matematiske bevismetoder er reduceret til nogle få mekaniske regler. Et formelt matematisk bevis består dermed af et sæt af aksiomer, hvorpå man har anvendt disse regler. Store dele af matematikken blev bevist i dette formelle, logiske system, og der var i 1920'erne en udbredt tro på, at disse aksiomer og regler var tilstrækkelige til at afgøre ethvert matematisk spørgsmål, som man kunne udtrykke i systemet. Gödels ufuldstændighedssætninger (1931) viste imidlertid, at dette ikke var tilfældet.

En computer er et eksempel på et logisk system, da den i princippet handler efter de regler, den er programmeret til. En Turingmaskine er en simpel matematisk model for en computer. Ikke desto mindre kan den i princippet simulere enhver anden computer.

Standsningsproblemet, eller Turings standsningsproblem, som det også bliver kaldt (efter Alan Turing) er Turingmaskinens pendant til Gödels ufuldstændighedssætninger. Standsningsproblemet er umiddelbart et relativt simpelt problem, som Turingmaskinen dog ikke kan afgøre. Standsningsproblemet er i sin natur tæt knyttet til Gödels ufuldstændighedssætninger. Begge dele udtaler sig om nogle af de begrænsninger, der kan være i formelle systemer: Turings standsningsproblem om programmer til maskiner og Gödels ufuldstændighedssætninger om systemer til formalisering af matematikken.

Rekursivitet og formelle systemer (deriblandt Turingmaskiner) hænger uløseligt sammen, det første afsnit handler derfor om rekursivitet. Andet afsnit handler om Turingmaskiner og standsningsproblemet for Turingmaskiner og er altså et eksempel på et formelt system med et uafgørligt problem. Tredje og sidste afsnit handler om Gödels ufuldstændighedssætninger.

Vi betragter i dette kapitel tallet 0, som et naturligt tal. Dette kapitel bygger hovedsagligt på Cori & Lascars bog [Las94].

4.1 Rekursivitet

Klassen af rekursive funktioner spiller en central rolle i studiet af beregnelighed. Intuitivt er de rekursive funktioner netop de funktioner, som kan beregnes algoritmisk, altså ved hjælp af en mekanisk procedure (Church's tese). Turingmaskinen er et bud på en præcis definition af begrebet algoritme, og det skal vise sig, at en funktion er rekursiv netop når der findes en Turing maskine, der beregner den. Under Church's tese kan Turing maskinen altså beregne præcis de funktioner, som er beregnelige i intuitiv forstand.

4.1.1 Rekursive funktioner

Definition 4.1.1. *Lad $\mathcal{F}_p$ være mængden af afbildninger fra $\mathbb{N}^p$ ind i $\mathbb{N}$, og $\mathcal{F} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_p$. Mængden af* primitive rekursive funktioner *er den mindste delmængde $\mathcal{E}$ af $\mathcal{F}$, som opfylder:*

1. *De konstante funktioner tilhører $\mathcal{E}$.*
2. *Projektionerne $P_i^k(x_1, \dots, x_k) = x_i$ ligger i $\mathcal{E}$ for alle $k \in \mathbb{N}$ og for alle $i \in 1, \dots, k$.*
3. *Succesor-funktionen $S(x) = x + 1$ tilhører $\mathcal{E}$.*
4. *$\mathcal{E}$ er stabil under substitution, dvs. hvis $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_k \cap \mathcal{E}$ og $g \in \mathcal{F}_n \cap \mathcal{E}$, så er $g(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{E}$.*
5. *$\mathcal{E}$ er stabil under rekursion, dvs. hvis $g \in \mathcal{F}_k \cap \mathcal{E}$ og $h \in \mathcal{F}_{k+2} \cap \mathcal{E}$ og*
   - $f(x_1, \dots, x_k, 0) = g(x_1, \dots, x_k)$
   - $f(x_1, \dots, x_k, y + 1) = h(x_1, \dots, x_k, y, f(x_1, \dots, x_k, y))$

   da er $f \in \mathcal{E}$.

Eksempel 4.1.2. *$f(x, y) = x + y$ er primitiv rekursiv idet*

- $f(x, 0) = x = P_1^1(x)$
- $f(x, y + 1) = h(x, y, f(x, y))$, hvor $h(x, y, z) = S(z) = S(P_3^3(x, y, z))$

Følgende funktioner er ligeledes primitive rekursive:

$$\delta(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{hvis } x > 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{hvis } x \geq y \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$sg(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x = 0 \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi har nemlig: $\delta(0) = 0$ og $\delta(y + 1) = y$ (rekursion)
$x \dot{-} 0 = x$ og $x \dot{-} (y + 1) = \delta(x \dot{-} y)$ (rekursion)
$sg(x) = x \dot{-} \delta(x)$ (substitution).

Definition 4.1.3. μ-operatoren, $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ *noteres* $\mu y(g(x_1, \ldots, x_k, y) = 0)$ *og er det mindste* y *således at* $(g(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$.

Bemærk, at μ-operatoren ikke altid er defineret. Mere præcist gælder der, at $\mu y(g(x_1, \ldots, x_k, y) = 0) = k$, hvis $(g(x_1, \ldots, x_k, k) = 0$, og hvis for alle $y' < k$, $(g(x_1, \ldots, x_k, y')$ er defineret og forskellig fra nul.
Mængden af *rekursive funktioner* $\mathcal{E}^*$ er foreningen af de primitive rekursive funktioner $\mathcal{E}$ og funktionerne opnået fra $\mathcal{E}$ ved anvendelse af μ-operatoren. En rekursiv funktion er ikke nødvendigvis total (i.e. overalt defineret), idet μ-operatoren ikke altid er defineret.

Eksempel 4.1.4. *Lad* $g(x, y) = x - 2$ *og* $f(x) = \mu y(g(x, y) = 0)$, f *er da den partielle rekursive funktion, som antager værdien* 0 *for* $x = 2$, *og som ikke er defineret for* $x \neq 2$.
$h(x) = \mu y(y > x)$ *er en total rekursiv funktion, som specielt er primitiv rekursiv, idet den er identisk med successor-funktionen.*

Der findes totale rekursive funktioner, som ikke er primitive rekursive, for eksempel Ackermann's funktion $A(x) = A_x(x)$, hvor $A_x(x)$ er defineret ved dobbelt rekursion:

- $A_0(x) = 2^x$
- $A_n(0) = 1$
- $A_{n+1}(x + 1) = A_n(A_{n+1}(x))$

se [Las94] p.18 for bevis.

Definition 4.1.5. *En mængde* A *er (primitiv) rekursiv hvis og kun hvis dens indikatorfunktion* 1_A *er (primitiv) rekursiv.*

Eksempel 4.1.6. *Enhver endelig mængde er primitiv rekursiv. Lad* $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *så er*

$$1_A = 1 \dot{-} sg(|x - x_1||x - x_2| \cdots |x - x_n|)$$

som er primitiv rekursiv idet $|x - y|$ *og* xy *oplagt er det.*

Hvis $A \subseteq \mathbb{N}^{p+1}$ er primitiv rekursiv, så gælder det samme for mængderne

$$\begin{array}{ll} B = \{(x_1, \ldots, x_p, y) | \exists t \leq y(x_1, \ldots, x_p, t) \in A\} & \\ C = \{(x_1, \ldots, x_p, y) | \forall t \leq y(x_1, \ldots, x_p, t) \in A\} & \text{thi} \\ 1_B(x_1, \ldots, x_p, y) = sg(\sum_{t=0}^{y} 1_A(x_1, \ldots, x_p, t)) & \text{og} \\ 1_C(x_1, \ldots, x_p, y) = sg(\prod_{t=0}^{y} 1_A(x_1, \ldots, x_p, t)) & \end{array}$$

Sætning 4.1.7. *For ethvert* $p \in \mathbb{N}$ *findes rekursive funktioner* $\alpha_p \in \mathcal{F}_p$ *og* $\beta_p^1, \beta_p^2, \ldots, \beta_p^p \in \mathcal{F}_1$*,som opfylder at* α_p *er en bijektion mellem* $\mathbb{N}^p$ *og* $\mathbb{N}$ *og* $\lambda x.(\beta_p^1(x), \beta_p^2(x), \ldots, \beta_p^p(x))$ *er dens reciprokke.*

Bevis:
Sætningen vises ved induktion efter p. For $p = 1$ er resultatet oplagt $\alpha_1 = \beta_1^1 = Id$. For $p = 2$ nummereres parrene i $\mathbb{N}^2$ diagonalt, dvs efter ordenen (0,0) (1,0)(0,1) (2,0)(1,1)(0,2) (3,0)(2,1)(1,2)(0,3) … hvor $(0, 0)$ får nummer 0. Så er $\alpha_2(x, y)$ lig antallet af par der kommer før (x, y) i ovenstående liste. Den n'te diagonal starter med $(n, 0)$ og har $n + 1$ elementer, så $\alpha_2(x, 0) = (x - 1) + 1 + (x - 2) + 1 + (x - 3) + 1 + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}x(x + 1)$ og $\alpha_2(x, y)$ er det

y'te par efter parret $(x+y,0)$, altså $\alpha_2(x,y) = \alpha_2(x+y,0) + y = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y$. Bemærk, at $\alpha_2(x,y) \geq x$ og $\alpha_2(x,y) \geq y$ så man kan definere

$$\beta_2^1(x) = \mu z \leq x(\exists t \leq x : \alpha_2(z,t) = x) \text{ og } \beta_2^2(x) = \mu z \leq x(\exists t \leq x : \alpha_2(t,z) = x)$$

Lad $A_x = \{z | \exists t \leq x : \alpha_2(z,t) \in \{x\}\}$ I følge eksempel 4.1.6 er A_x primitiv rekursiv, og det følger at $\beta_2^1(x) = \mu z \leq x(z \in A_x)$ er rekursiv. Tilsvarende for β_2^2.
Antag, at α_n og $\beta_n^i, 1 \leq i \leq n$ eksisterer. Så kan man definere

$$\alpha_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \alpha_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha_2(x_n, x_{n+1})),$$

som da er rekursiv, og for $1 \leq i \leq n-1$ har man da $\beta_{n+1}^i = \beta_n^i$ mens $\beta_{n+1}^n = \beta_2^1 \circ \beta_n^n$ og $\beta_{n+1}^{n+1} = \beta_2^2 \circ \beta_n^n$, som således også er rekursive. $\square$

4.2 Turingmaskiner

En Turingmaskine (i det følgende forkortet TM) er en matematisk model for det intuitive begreb algoritme. En TM er givet ved:

- n bånd, som hver er delt op i nummererede celler startende fra venstre med cellerne nr 1.
- En endelig mængde af tilstande E
- En afbildning $M : S^n \times E \to S^n \times E \times \{-1, 0, 1\}$, hvor $S = \{d, b, |\}$. M kaldes transitionstabellen.

d	celle nr.2	celle nr.3	bånd nr.1
d	celle nr.2	celle nr.3	bånd nr.2
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
d	celle nr.2	celle nr.3	bånd nr.n

↑
cursor

Der findes forskellige måder at definere Turingmaskinen på, nogle bruger fx kun et bånd, men de er essentielt ens forstået på den måde, at de beregner de samme funktioner.
TM's bånd er afgrænsede til venstre og uendelige mod højre. TM har desuden en cursor, som kan læse, skrive, slette og flytte sig alt efter instruktionerne givet ved M. E indeholder som minimum den initiale tilstand e_i og en (eller flere) slut-tilstande e_f. Maskinen befinder sig til ethvert tidspunkt i netop en tilstand. S er maskinens alfabet bestående af d (for debut) b (blank) og $|$. Den tredje variabel i $M's$ billede angiver, hvilken vej cursoren skal flytte sig (1: en celle til højre, -1: en celle til venstre og 0: bliv stående) *efter* at have foretaget eventuelle ændringer i de celler, hvor den står. Maskinen standser når den når en slut-tilstand e_f. Cellerne med nr 1 indeholder altid symbolet d. Maskinen kan ikke slette symbolet d, og cursoren kan ikke gå længere til venstre når den står ved d. Til tiden $t = 0$ står cursoren ved cellerne med nr 1 (se figur). Maskinen skriver aldrig på de bånd, som indeholder input. TM's arbejde illustreres bedst ved et par eksempler:

Eksempel 4.2.1. Successor-funktionen: *TM skal bruge 2 bånd og 2 tilstande.* $E = \{e_i, e_f\}$

$$\begin{aligned} M(d,d,e_i) &= (d,d,e_i,+1) \\ M(|,b,e_i) &= (|,|,e_i,+1) \\ M(b,b,e_i) &= (b,|,e_f,0) \end{aligned}$$

Inputtet x står på øverste bånd når maskinen starter, dvs. celle nr 2 til og med nr x+1 indeholder en streg. Maskinen sætter streger på bånd 2 indtil den når celle x+1, hvor den sætter en streg og stopper. Nu står input x på bånd 1 og resultatet x+1 på bånd 2.

Projektionerne $P_k^i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$

Lad i, k *være givet,* $i \leq k$. *TM skal have* $k+1$ *bånd og 2 tilstande.*

$$\begin{aligned} &M(d,\ldots,d,e_i) = (d,\ldots,d,e_i,+1) \\ &M(s_1,\ldots,s_k,b,e_i) = (s_1,\ldots,s_k,|,e_i,+1), \textit{ for } s_i = | \\ &M(s_1,\ldots,s_k,b,e_i) = (s_1,\ldots,s_k,b,e_f,0), \textit{ for } s_i = b \end{aligned}$$

Denne maskine kopierer simpelthen indholdet af det i'te bånd til det nederste bånd.

De konstante funktioner $f(x_1, \ldots, x_p) = k$ *for* $p, k \in \mathbb{N}$ *kan beregnes af en TM med* $p+1$ *bånd og* $k+2$ *tilstande* $\{e_i, e_1, \ldots, e_k, e_f\}$

$$\begin{aligned} &M(d,\ldots,d,e_i) = (d,\ldots,d,e_1,+1) \\ &M(s_1,\ldots,s_p,b,e_n) = (s_1,\ldots,s_p,|,e_{n+1},+1) \\ &\textit{for alle } s_1,\ldots,s_p \textit{ og } 1 \leq n \leq k-1 \\ &M(s_1,\ldots,s_p,b,e_k) = (s_1,\ldots,s_p,|,e_f,0) \\ &\textit{for alle } s_1,\ldots,s_p \end{aligned}$$

Man siger at TM beregner en funktion $f : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$, hvis TM har p+1 bånd og hvis der for $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{dom}(f)$ gælder, at TM når en slut-tilstand med $(x_1, \ldots, x_p)$ på de p første bånd og $f(x_1, \ldots, x_p)$ på det sidste. Resten af båndene skal være tomme. Desuden skal der gælde, at for $(x_1, \ldots, x_p) \notin \mathrm{dom}(f)$ standser maskinen ikke. f kaldes da *Turing-beregnelig*

Sætning 4.2.2. *En funktion er Turing-beregnelig hvis og kun hvis den er rekursiv.*

Bevis:

For at vise at enhver rekursiv funktion er T-beregnelig, er det tilstrækkeligt at vise, at det gælder for projektionerne, de konstante funktioner og successor-funktionen (hvilket allerede er gjort i eksempel 4.2.1) samt at mængden af T-beregnelige funktioner er stabil mht. rekursion, substitution og μ-operatoren.

Først **rekursionen**:

Lad $f : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ være givet ved

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_p,0) &= g(x_1,\ldots,x_p) \\ f(x_1,\ldots,x_p,y+1) &= h(x_1,\ldots,x_p,y,f(x_1,\ldots,x_p,y)) \end{aligned}$$

hvor g og h er partielle funktioner, som beregnes med maskinerne M hhv. M'. Antag, at M har $p+1+k$ bånd og M' $p+3+k'$, samt at E er mængden af tilstande for M og E' mængden af tilstande for M'. Idet man altid kan give en tilstand et nyt navn, kan det antages, at $E \cap E' = \emptyset$. Maskinen N, som skal beregne f skal bruge $p+4+k+k'$ bånd og mængden af tilstande er $E \cup E' \cup \{e_0, \ldots, e_7\}$, hvor e_i'erne er tilstande som ikke allerede findes i $E \cup E'$. Til at begynde med står $x_1, \ldots, x_{p+1}$ på de første $p+1$ bånd og når N standser (hvis den standser) skal $f(x_1, \ldots, x_{p+1})$ stå på bånd nr. $p+2$. Ideen er at lade N beregne $f(x_1, \ldots, x_p, 1), f(x_1, \ldots, x_p, 2), \ldots, f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$, mens et af båndene (p+2) bruges som tæller, der holder styr på, hvornår maskinen er nået til $f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$. N starter som M på båndene 1,. . . ,$p, p+4$ (samt de k bånd M bruger til at arbejde på). Hvis M standser, står $g(x_1, \ldots, x_p)$ på bånd $p+4$ og N skifter til tilstand e_0. I denne tilstand kopieres indholdet af $p+4$ til $p+3$ samtidig med at $p+4$ slettes. Tilstanden e_1 sammenligner $p+2$ med $p+1$, dvs. sammenligner x_{p+1} med tælleren. Hvis indholdet er ens skiftes til e_6 som sørger for at flytte indholdet af $p+3$ til $p+2$, som jo var output-bånd for N, hvorefter den skifter til e_7 som er slut-tilstanden for N. Ellers skiftes til e_2, som har til opgave at lægge én til tælleren, altså sætte en streg på $p+2$. Nu skiftes til begyndelses-tilstanden for M'. M' bruger båndene 1,. . . ,$p, p+2, p+3$ som input og skriver resultatet på bånd $p+4$. Hvis M' standser skiftes til til e_0 igen. Tilstandene e_3, e_4, og e_5 har alle til opgave at flytte cursoren til venstre inden der skiftes til tilstandene hhv. e_1, e_2 og e_6.

substitution:

Lad $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ og $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ være T-beregnelige funktioner. Det drejer sig om at konstruere en Turing-maskine N, som beregner $h = g(f_1, \ldots, f_n)$. Lad M_i være maskinen, som beregner f_i for $i = 1, \ldots, n$ og M maskinen, som beregner g. Antag for hvert i, at M_i har p_i bånd, hvor $p_i \geq p+1$ og at mængden af tilstande er E_i. Maskinen M har m bånd og E betegner mængden af tilstande. Som før antages det, at disse mængder er disjunkte. N har $p' = p + \sum_{i=1}^{n}(p_i - p) + (m - n)$ bånd og mængden af tilstande er $E \cup (\cup_{i=1}^{n} E_i) \cup \{e_N, e_f\}$.

N starter med at arbejde som M_1 dog uden at bruge bånd p+1, hvor det endelige resultat skal stå. Resultatet $f(x_1, \ldots, x_p)$ skrives i stedet på et andet bånd B_1, hvis M_1 vel at mærke stopper, og slut-tilstanden for M_1 skal bringe cursoren hen til starten af båndene for derefter at skifte til begyndelses-tilstanden for M_2. Resultatet af $M_2's$ beregninger skrives på af bånd B_2 (som er forskelligt fra bånd p+1 og fra B_1) og så fremdeles. $M_n's$ slut-tilstand bringer cursoren til start og skifter til M's begyndelses-tilstand. N arbejder nu som M, men med båndene $B_1, \ldots, B_n$ som input og skriver resultatet $h(x_1, \ldots, x_p)$ på bånd nr. p+1. Derefter bringer slut-tilstanden for M cursoren tilbage til start og e_N sletter indholdet af $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hvorefter N stopper i tilstanden e_f. Inputtet $x_1, \ldots, x_p$ står nu på båndene 1,. . . ,p og output $h(x_1, \ldots, x_p)$ på bånd p+1. Resten af båndene er tomme.

μ-operatoren:

Maskinen N, som beregner $g(x_1, \ldots, x_p) = \mu y(f(x_1, \ldots, x_p, y) = 0)$, hvor f er en funktion, som beregnes af maskinen M, konstrueres tilsvarende:

N har $p+2$ bånd og mængden af tilstande er tilstandene for M forenet med $\{e_0, \ldots, e_5\}$ nye. N starter med at arbejde som M med $x_1, \ldots, x_p, 0$ som input. Hvis f er defineret for $x_1, \ldots, x_p, 0$ vil M stoppe og output stå på bånd $p+2$. M's slut-tilstand bringer cursoren til start og skifter til e_0. e_0 checker, om der står noget på bånd $p+2$. Hvis det første e_0 møder er et b går N i slut-tilstanden e_5. Ellers skiftes til e_1, som skriver en streg på $p+1$ (således at input for M nu er $x_1, \ldots, x_p, 1$) og går over i e_2, som bringer cursoren til start. e_3 sletter indholdet af $p+2$ og e_4 har også til opgave at bringe cursoren til start. N bliver ved til den har fundet et y så $f(x_1, \ldots, x_p, y) = 0$, hvis det eksisterer, ellers stopper maskinen ikke.

For at vise den anden implikation, altså at enhver funktion som er T-beregnelig er rekursiv, antages det, at M er en vilkårlig TM, som beregner en partiel funktion $f : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$. Det skal vises, at f er rekursiv. M er givet ved:

- antallet af bånd: n
- antallet af tilstande $m+1$. Her antages det at tilstandene nummereres fra 0 til m og at 0 betegner begyndelsestilstanden, mens 1 betegner sluttilstanden.
- Transitionstabellen $M : S^n \times E \to S^n \times E \times \{-1, 0, 1\}$

Lad tallene 0, 1 og 2 stå for henholdsvis b, d og $|$. Skriv indholdet af cellerne til tiden t op i en liste $K(t) = (s_0, s_1, \ldots, s_i, \ldots)$, hvor $s_i \in \{0, 1, 2\}$ for alle i. Start med celle 1 bånd 1 derefter celle 1 bånd 2 indtil celle 1 bånd n dernæst cellerne med nr. 2 osv. Listen har et endeligt antal elementer forskellige fra nul, thi til tiden $t = 0$ står input, som er endeligt på båndene og maskinen kan højst tilføje et symbol per tidsenhed. Bemærk, at $s_{n(u-1)+(v-1)}$ svarer til symbolet i celle u bånd $v \leq n$ (hvor n var antallet af bånd). Listen kodes på følgende måde:

$$\Gamma(K) = \sum_{i \geq 0} s_i 3^i$$

Det er klart, at Γ er injektiv da $s_i \in \{0, 1, 2\}$ for alle i. Man genfinder tallet som svarer til symbolet i celle u bånd v ved:

$$r(q(\Gamma(K), 3^{n(u-1)+(v-1)}), 3)$$

hvor $r(x, y)$ er resten ved heltalsdivision af x med y og $q(x, y)$ kvotienten. Antag nemlig, at $n(u-1) + (v-1) = k$, da er

$$\Gamma(K) = s_0 + s_1 3 + \cdots + s_{k-1} 3^{k-1} + s_k 3^k + s_{k+1} 3^{k+1} + \cdots$$

og

$$\sum_{i=0}^{k-1} s_i 3^i < 3^k$$

så

$$\begin{aligned} q(\Gamma(K), 3^k) &= s_k + s_{k+1} 3 + s_{k+2} 3^2 + \cdots \\ &= s_k + 3(s_{k+1} + s_{k+2} 3 + \cdots) \\ &\equiv s_k \bmod 3 \end{aligned}$$

det vil sige $r(q(\Gamma(K), 3^k), 3) = s_k$ som ønsket.

Maskinens *situation* til tiden t er $S(t) = (e, k, K(t))$, hvor $e \in \{0, \ldots, m\}$ er tilstanden og k nummeret på de celler cursoren befinder sig ved.

$$\Gamma(S) = \alpha_3(e, k, \Gamma(K))$$

Funktionen $Sit(t, x_1, \ldots, x_p) = \Gamma(S(t))$ er primitiv rekursiv[1]. $Sit(t, x_1, \ldots, x_p)$ er situation til tiden t for maskinen startet på input $x_1, \ldots, x_p$. Man kan nu definere en rekursiv funktion, som finder beregningstiden for et giver input $x_1, \ldots, x_p$.

$$T(x_1, \ldots, x_p) = \mu t(\beta_3^1(Sit(t, x_1, \ldots, x_p)) = 1)$$

[1]Se [Las94] p 35 for bevis

altså T finder det mindste t således at M med inputtet $x_1, \dots, x_p$ befinder sig i sluttilstanden. Hvis $f(x_1, \dots, x_p)$ ikke er defineret, standser M ikke og T er da heller ikke defineret. Hvis $f(x_1, \dots, x_p)$ er defineret, vil resultatet stå på bånd $p+1$ til tiden t. Det drejer sig altså om at tælle antallet af streger på $p+1$ til dette tidspunkt. Betragt dertil

$$\alpha(x) = \mu y(r(q(\beta_3^3(x), 3^{n(y+1)+p}), 3) = 0)$$

Hvis $x = Sit(t, x_1, \dots, x_p)$ så er $\beta_3^3(x) = \Gamma(K(t))$ og α finder da det mindste y således at symbolet i celle $y+2$, bånd $p+1$ er et b. Idet første symbol på et bånd altid er d, svarer $\alpha(x)$ præcis til antallet af streger på bånd $p+1$. Man finder nu

$$f(x_1, \dots, x_p) = \alpha(Sit(T(x_1, \dots, x_p), x_1, \dots, x_p)).$$

Da f er sammensat af rekursive funktioner, ses det som ønsket, at f selv er rekursiv.

$\square$

En TM er som bekendt givet ved antallet af bånd n, antallet af tilstande $m+1$ og transitionstabellen. Man kan afbilde transitionstabellen ind i $\mathbb{N}$ på følgende måde: For $(s_1, \dots, s_n, e) \in S^n \times E$ sæt

$$\begin{array}{l}
r_1 = \alpha_2(\Gamma(s_1, \dots, s_n), e) \\
r_2 = \alpha_3(\Gamma(t_1, \dots, t_n), e', \varepsilon+1) \text{ hvor } \varepsilon \in \{-1, 0, 1\} \text{ og} \\
t_1, \dots, t_n, e' = M(s_1, \dots, s_n, e) \\
n(s_1, \dots, s_n, e) = (\pi(r_1))^{r_2}, \text{ hvor } \pi(i) \text{ er det } i+1\text{'te primtal}
\end{array}$$

Koden for transitionstabellen er da

$$u = \prod_{(s_1, \dots, s_n, e) \in S^n \times E} n((s_1, \dots, s_n, e)$$

Definition 4.2.3. *Et indeks for en TM er tallet $\alpha_3(n, m+1, u)$.*

Den universelle Turingmaskine

-er en TM, som for et naturligt tal p, kan beregne enhver rekursiv funktion af p variable. Man ved allerede, at til enhver rekursiv funktion findes en TM, som beregner denne. Ideen er, at knytte et indeks til hver TM og derefter vise, at den partielle funktion $\varphi : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$, som er defineret ved:

$$\varphi^p(i, x_1, \dots, x_p) = \begin{cases} \text{ikke defineret} & \text{hvis } i \text{ ikke er indeks for en TM med mindst} \\ & p+1 \text{ bånd} \\ \text{indholdet af det } p+1\text{'te bånd} & \text{hvis TM med indeks } i \text{ standser} \\ & \text{på input } x_1, \dots, x_p \\ \text{ikke defineret} & \text{hvis TM med indeks } i \text{ ikke standser} \\ & \text{på input } x_1, \dots, x_p \end{cases}$$

er rekursiv. Dette betyder nemlig, at der findes en TM, som beregner $\varphi^p(i, x_1, \dots, x_p)$ dvs. givet et $i \in \mathbb{N}$, opfører den sig som maskinen med indeks i, hvis i altså er et indeks for en maskine som tager p variable. Afbildning fra mængden af TM ind i $\mathbb{N}$ er ikke surjektiv, så der er også tal i $\mathbb{N}$ som ikke er indeks for nogensomhelst maskine.

Sætning 4.2.4. *For hvert $p > 0$, er φ^p rekursiv og hvis f er en rekursiv funktion af p variable, findes et naturligt tal i således at $f = \lambda x_1, \ldots, x_p.\varphi^p(i, x_1, \ldots, x_p) = \varphi_i^p$*

Bevis: Hvis f er en rekursiv funktion af p variable, så findes der i følge sætning 4.2.2 en TM, som beregner f. Denne TM har et indeks i_0, så per definition af φ, er $f = \varphi_{i_0}^p$, og i_0 kaldes da indeks for f.
Man for brug for følgende:

$$I_p = \{i | i \text{ er indeks for en TM med mindst } p+1 \text{ bånd}\}$$

$$ST^p(i, t, x_1, \ldots, x_p) = \begin{cases} \text{hvis } i \in I_p: & \Gamma(S(t)) \text{ dvs} \\ & Sit(t, x_1, \ldots, x_p) \text{ for maskinen med indeks } i \\ \text{ellers:} & 0 \end{cases}$$

ST^p er primitiv rekursiv[2]. På samme måde som tidligere defineres en funktion, som finder beregningstiden:

$$T^p(i, x_1, \ldots, x_p) = \mu t(\beta_3^1(ST^p(i, t, x_1, \ldots, x_p)) = 1)$$

desuden defineres mængderne

$$B^p = \{(i, t, x_1, \ldots, x_p) | \beta_3^1(ST^p(i, t, x_1, \ldots, x_p)) = 1\}$$

$$C^p = \{(i, y, t, x_1, \ldots, x_p) | i \in I_p, (i, t, x_1, \ldots, x_p) \in B^p, y = \alpha(ST^p(i, t, x_1, \ldots, x_p))\}$$

Det ses at B^p og C^p er primitive rekursive. At $y = \alpha(ST^p(i, t, x_1, \ldots, x_p))$ betyder at maskinen med indeks i startet på $, x_1, \ldots, x_p$ har y streger på bånd $p+1$ til tiden t. Det følger nu, at

$$\varphi^p(i, x_1, \ldots, x_p) = \mu y((i, y, T^p(i, x_1, \ldots, x_p), x_1, \ldots, x_p) \in C^p)$$

□

Church's tese:

En talteoretisk funktion er beregnelig i intuitiv forstand hvis og kun hvis den er rekursiv.

Church's tese kan selvfølgelig ikke bevises, da man ikke kan give nogen præcis definition af det at være "beregnelig i intuitiv forstand", på den anden side findes der ingen modeksempler på Church's tese. At en funktion er beregnelig i intuitiv forstand er det samme som at der findes en opskrift eller en algoritme til at beregne den. Algoritme er også et intuitivt begreb, og Turingmaskinen et forsøg på at indfange det. De Turing-beregnelige funktioner er netop de rekursive, så Church's tese kan også formuleres: *En talteoretisk funktion funktion er beregnelig i intuitiv forstand hvis og kun hvis den er Turing-beregnelig hvis og kun hvis der findes en algoritme til at beregne den.* Turingmaskinen er langt fra den eneste definition af begrebet algoritme, men samtlige definitioner har vist sig at være ækvivalente[3] forstået på den måde, at de beregner de samme funktioner nemlig de rekursive, hvilket understøtter Church's tese.

[2] se [Las94] p.38 for bevis
[3] [Men97] p.345

4.2.1 Standsningsproblemet

Standsningsproblemet for en TM M drejer sig om at afgøre, hvorvidt M standser når maskinen startes på et input x.

Man siger, at et problem er afgørligt hvis der findes en algoritme, som løser det. Under Church's tese er det det samme som at sige, at der findes en rekursiv funktion eller en TM som løser problemet. Hvis det ikke er tilfældet, siges problemet at være uafgørligt. Der findes både Turingmaskiner med afgørlige og med uafgørlige standsningsproblemer.

Eksempel 4.2.5. *Betragt en TM M med 2 bånd og 3 tilstande og transitionstabellen*

$$\begin{aligned}&M(d,d,e_i) = (d,d,e_i,+1)\\&M(|,b,e_i) = (|,b,e_1,-1)\\&M(b,b,e_i) = (b,b,e_f,0)\\&M(b,|,e_i) = (b,|,e_1,-1)\\&M(s_1,s_2,e_1) = (s_1,s_2,e_1,+1) \text{ hvor } s_1,s_2 \in \{d,b,|\}\end{aligned}$$

M er et simpelt eksempel på en maskine med et afgørligt standsningsproblem. M standser hvis og kun hvis $x = 0$.

Definition 4.2.6. *Lad $A \subseteq \mathbb{N}^p$, man siger at mængden A er rekursivt numerabel (forkortes r.n.) hvis den er domænet af en rekursiv funktion.*

Betragt den rekursive funktion φ_i^p, som er defineret under afsnittet om den universelle Turingmaskine.

Man noterer $\mathrm{dom}\varphi_i^p = W_i^p$. Bemærk, at *enhver rekursiv mængde er rekursivt numerabel.* Thi hvis A er rekursiv, så er 1_A rekursiv. Og funktionen $f(x) = \mu y(y+1 = x)$ er rekursiv og defineret for alle $x \neq 0$. $f \circ 1_A$ er rekursiv og domænet er netop A, hvilket viser, at A er r.n.

Lemma 4.2.7. *$A \subseteq \mathbb{N}^p$ er rekursiv hvis og kun hvis A og $\bar{A}$ (hvor $\bar{A} = \mathbb{N}^p \setminus A$) begge er rekursivt numerable.*

Bevis: Hvis A er rekursiv, så er $\bar{A}$ det også, idet $1_{\bar{A}} = 1 \dot{-} 1_A$, og de er da begge r.n. På den anden side, hvis både A og $\bar{A}$ er r.n. findes indeks j,k så $A = W_j^p$ og $\bar{A} = W_k^p$. Man ved desuden at

$$B^p = \{(i,t,x_1,\ldots,x_p) | \beta_3^1(ST^p(i,t,x_1,\ldots,x_p)) = 1\}$$

er rekursiv,

$$B^p(i) = \{(t,x_1,\ldots,x_p) | (i,t,x_1,\ldots,x_p) \in B^p\}$$

er det derfor også. Lad

$$h(x_1,\ldots,x_p) = \mu t((t,x_1,\ldots,x_p) \in B^p(j) \cup B^p(k))$$

h er rekursiv og total. $B^p(j)$ er netop de $(t,x_1,\ldots,x_p)$ sådan at maskinen med indeks j standser til tiden t på input $x_1,\ldots,x_p$. Det vil sige, hvis der findes et t så $(t,x_1,\ldots,x_p) \in B^p(j)$ så er

$$x_1,\ldots,x_p \in \mathrm{dom}\varphi_j^p = A$$

Altså $(x_1,\ldots,x_p) \in A$ hvis og kun hvis $(h(x_1,\ldots,x_p),x_1,\ldots,x_p \in B^p(j))$. Da $B^p(j)$ er rekursiv, er A det også. $\square$

Lemma 4.2.8. *Selvstandsningsproblemet er uafgørligt.*

Bevis:
Selvstandsningsproblemet handler om at afgøre, hvorvidt en TM med indeks x standser på input x. At vise at det er uafgørligt kommer ud på at vise, at mængden $K = \{x|\varphi_x^1(x) \text{ er defineret}\} = \{x|x \in W_x^1\}$ ikke er rekursiv.

Antag, at K *er* rekursiv, så er mængden $\bar{K}$ rekursivt numerabel i følge lemma 4.2.7. Det vil sige, der findes et indeks i_0, så

$$\bar{K} = \text{dom}\varphi_{i_0}^1 = W_{i_0}^1$$

Vi har nu:

$$\begin{aligned} & i_0 \in \bar{K} \\ \Leftrightarrow \quad & i_0 \in W_{i_0}^1 \\ \Leftrightarrow \quad & i_0 \in K \end{aligned}$$

hvilket er en modstrid. Konklusion: K er ikke rekursiv. □

Sætning 4.2.9. *Det specielle standsningsproblem er uafgørligt.*

Bevis:
Givet et indeks i og et input x at afgøre om $\varphi^1(i,x)$ er defineret, eller med andre ord om TM med indeks i standser på x, kaldes det specielle standsningsproblem. Det skal vises, at $W = \{(i,x)|\varphi^1(i,x) \text{ er defineret}\} = \{(i,x)|x \in W_x^1\}$ ikke er rekursiv. Betragt mængden $B = \{(x,x)|x \in \mathbb{N}\}$. B er rekursiv da $1_B(x,y) = 1 \dot{-} |x-y|$. $K' = \{(x,x)|x \in K\}$ er til gengæld ikke rekursiv i følge ovenstående lemma, idet $1_{K'}(x,x) = 1_K(x)$. Det ses at $K' = B \cap W$, så hvis W var rekursiv ville K' også være det. Konklusion: W er ikke rekursiv. □

Bemærkning 4.2.10. *K og W er rekursivt numerable: K er domænet af den rekursive funktion $g(x) = \varphi^1(x,x)$, og W er domænet af $h(i,x) = \mu t((i,t,x) \in B^1)$ som ligeledes er rekursiv.*

At det specielle standsningsproblem er uafgørligt betyder (under Church's tese) at der ikke nogen algoritme som kan løse det. Med andre ord findes der ingen algoritme (eller TM) som givet et vilkårligt computerprogram og et vilkårligt input til dette program, kan afgøre hvorvidt programmet vil standse på dette input.

4.3 Gödels ufuldstændighedssætninger

I 1910 udkom Whitehead & Russels omfattende værk Principia Mathematica. Et af målene var en fuldstændig formalisering af aritmetikken forstået på den måde, at man ved udelukkende at arbejde i et symbolsprog og med ganske få interaktions- (eller deduktions-) regler kunne fjerne al semantik fra den matematiske bevisførelse. Et sådan symbolsprog med deduktionsregler kaldes et *logisk system.*

Hypotesen var, at man i det logiske system, på grundlag af Peano's aksiomer for aritmetikken, kunne vise alle teoremer indenfor denne. Man troede med andre ord, at systemet var *komplet* det vil sige, at for ethvert udsagn F skulle man enten kunne udlede F eller $\neg F$ i systemet.

Mange matematikere troede at en sådan aksiomatisering var mulig, ikke blot for aritmetikken, men for hele matematikken, og flere arbejdede på at bevise det. I 1931 udkom imidlertid Gödels artikel "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme", som en gang for alle fastslog projektets umulighed. Gödel viser nemlig i sin første ufuldstændighedssætning, at ethvert aksiomssystem (også kaldet *teori*) for aritmetikken, som opfylder, at men effektivt (i.e. rekursivt) kan afgøre, om et givet udsagn er et aksiom eller ej, ikke kan være komplet. I sin anden sætning giver han et eksempel på et uafgørligt udsagn, altså et udsagn, som opfylder at hverken det selv eller dets negation kan vises i systemet.

4.3.1 Signaturer, strukturer og sprog

Definition 4.3.1. *En* signatur σ *består af*

- *en indiceret mængde* $\{c_i\}$ *af konstantsymboler,*
- *en mængde af* $\{f_i\}$ *funktionssymboler* f_j *af aritet (antal argumenter)* m_j *og*
- *en mængde* $\{r_i\}$ *af relationssymboler* r_k *af aritet* m_k*.*

En struktur

$$\mathcal{M} = \langle E, r_k^{\mathcal{M}}, f_j^{\mathcal{M}}, c_i^{\mathcal{M}} \rangle$$

af signatur σ *består af en mangde* E *kaldet* universet*,*

- *elementer* $c_i^{\mathcal{M}} \in E$*,*
- *funktioner* $f_j^{\mathcal{M}} : E^{m_j} \to E$ *og*
- *relationer* $r_k^{\mathcal{M}}$ *på* E^{m_k}*.*

Konstanterne $c_i^{\mathcal{M}}$*, funktionerne* $f_j^{\mathcal{M}}$ *og relationerne* $r_k^{\mathcal{M}}$ *kaldes for* fortolkningen i $\mathcal{M}$ *af hhv.* c_i*,* f_j *og* r_k*.*

Eksempel 4.3.2. *Strukturen* $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ *er en struktur af signatur*

- *2 konstantsymboler* $\{c, d\}$ *(fortolket af* 0 *og* 1*).*
- *2 binære funktioner* $\{f, g\}$ *(fortolket af* $+$ *og* $\cdot$*).*
- *1 binær relation* $\{r\}$ *(fortolket af* $\leq$*).*

En signatur σ har et *sprog* $\mathcal{L}$. Dette sprog består af et alfabet, termer (ord over alfabetet) og formler ("påstande" om termerne).

Alfabetet

Alfabetet (der også kaldes $\mathcal{L}$) er en foreningsmængde bestående af

- en tællelig mængde $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$ hvor elementerne kaldes *variable*,
- mængden $\{(,), \neg, \wedge, \vee, \forall, \exists\}$ af symboler, hvor "(" og ")" kaldes *parenteser* og bruges til at adskille termer, "$\wedge$" og "$\vee$" kaldes *konnektiverne* hhv. *og* og *eller*, "$\neg$" kaldes *ikke* og "$\forall$" og "$\exists$" kaldes *kvantorene* hhv. al- og eksistens- og
- mængderne $\{c_i\}$, $\{f_j\}$ og $\{r_k\}$ af hhv. konstant-, funktions- og relationssymboler fra σ.

Termer

Mængden $\mathcal{T}(\mathcal{L}) = \bigcup_n \mathcal{T}_n(\mathcal{L})$ af termer i sproget $\mathcal{L}$ defineres induktivt vha. *kompleksiteten* af termer. Vi definerer altså

$\mathcal{T}_0(\mathcal{L})$: mængden af termer af kompleksitet 0 til at være foreningsmængden $\{v_1, v_2, v_3, \dots\} \cup \{c_i\}$ af variable og konstantsymboler og

$\mathcal{T}_{n+1}(\mathcal{L})$: mængden af termer af kompleksitet $n+1$ hvor elementerne er af formen $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$, hvor f er et m-ært funktionssymbol og $t_1, t_2, \dots, t_m$ er termer af kompleksitet mindre end eller lig med n hvor mindst én term har kompleksitet n.

Eksempel 4.3.3. *Betragt sproget $L = \langle \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. Her er termen $v_2 \cdot (v_1 + 1)$ en term af kompleksitet 2, da den er opbygget af termerne v_2 og $v_1 + 1$ hvor v_2 har kompleksitet 0 mens $v_1 + 1$ har kompleksitet 1 da den er opbygget af v_1 og 1 der begge har kompleksitet 1.*

Bemærkning 4.3.4. *For termen $v_2 \cdot (v_1 + 1)$ i Eksempel 4.3.2 kan vi lave grafen*

$$\begin{tikzcd}
 & & v_2 \\
v_2 \cdot (v_1 + 1) \arrow[urr, "\cdot"] \arrow[r, "\cdot"] & v_1 + 1 \arrow[r, "+"] \arrow[dr, "+"] & v_1 \\
 & & 1
\end{tikzcd}$$

En sådan graf kaldes for en dekomposition *af termen $v_2 \cdot (v_1 + 1)$. Det indses let ved induktion at en vilkårlig term i et vilkåligt sprog har entydig dekomposition: Hvis termen er en konstant eller en variabel er påstanden oplagt men hvis termen har formen $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$ er eneste mulighed for dekomponering at splitte op i termerne $t_1, t_2, \dots, t_m$, der induktivt kan antages at have entydige dekompositioner.*

Formler

Ligesom mængden af termer, defineres mængden $\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \bigcup_n \mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ af formler i $\mathcal{L}$ også induktivt. Altså defineres

$\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$: mængden af formler af kompleksitet 0 (også kaldet *atomiske* formler) betsår af udtryk af formen $t_1 = t_2$ og $r(t_1, t_2, \dots, t_m)$, hvor $t_1, t_2, \dots, t_m$ er termer og r et m-ært relationssymbol og

$\mathcal{F}_{n+1}(\mathcal{L})$: mængden af formler af kompleksitet $n + 1$ består af udtryk af formen $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$, $\exists v F$ og $\forall v F$, hvor F og G er formler af kompleksitet mindre end eller lig med n og mindst én af kompleksitet n.

Bemærkning 4.3.5. *Når formler defineres på denne måde, resulterer det i at $\mathcal{L}$ bliver et sprog af* første orden. *I et sprog af første orden må der kun kvantificeres over individer i sproget, dvs. at det kun er variable der kan optræde umiddelbart efter kvantorsymbolet. I* højere ordens *sprog tillades det også at man kan kvantificere over formler i sproget, så en formel som $\forall v_2 \exists F \forall v_1 (F \vee (v_2 = v_1))$ ville være tilladt i et sådant sprog; men dette er altså ikke tilladt her!*

Til enhver formel $F \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ knyttes et tal $QR(F) \in \mathbb{N}_0$ kaldet *kvantorrangen* af F. Det defineres induktivt ved

$$QR(F) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } F \text{ er atomisk} \\ QR(g), & \text{hvis } F = \neg g \\ \max\{QR(g), QR(h)\}, & \text{hvis } F = g \wedge h \text{ eller } F = g \vee h \\ QR(g) + 1, & \text{hvis } F = \forall v_n g \text{ eller } F = \exists v_n g \end{cases}$$

Kantorrangen af en formel er så at sige et udtryk for på hvor mange niveauer der kvantificeres.

Bemærkning 4.3.6. *Ved et afgument tilsvarende det i Bemærkning 4.3.4 (strukturel induktion) indses det at formler har en entydig dekomposition i atomiske formler.*

Betragt formlen $r(v_1, v_2) \vee (\forall v_1(v_1 = v_3))$. Her kaldes den første forekomst af variablen v_0 *fri* mens den anden forekomst kaldes *bundet*. Man kan afgøre om hvorvidt en forekomst af en variabel er fri eller bundet ved at betragte dekompositionen:

$$\begin{tikzcd} & & r(v_1, v_2) \\ r(v_1, v_2) \vee (\forall v_1(v_1 = v_3)) \arrow[rru, "\vee"] \arrow[r, "\vee"] & \forall v_1(v_1 = v_3) \arrow[r, "\forall v_1"] & v_1 = v_3 \end{tikzcd}$$

Enhver forekomst af en variabel "ender" i en atomisk formel ude til højre i dekompositionen. Hvis man følger pilene "baglæns" hen til den oprindelige formel, og på sin vej møder en kvantor med den pågældende variabel, er denne forekomst af variablen bundet. Hvis en forekomst ikke er bundet kaldes den fri. En variabel v kaldes *fri i en formel* F, hvis der er mindst én fri forekomst af v i F. Mængden af alle frie variable i F betegnes $FV(F)$. Hvis der for en formel F gælder at $FV(F) = \emptyset$ kaldes F en *lukket* formel eller en *sætning*. Hvis $FV(F) \subseteq \{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ benyttes ofte notationen $F[v_1, v_2, \ldots, v_m]$ for at understrege dette ($v_1, v_2, \ldots v_m$ er altså variable der *kan* være frie i F men ikke *behøver* at være det); samme notation benyttes også for termer, hvor forekomster af variabler (med få undtagelser[4]) altid er frie.

Definition 4.3.7. *Hvis en struktur $\mathcal{S}$ har en signatur σ, og $\mathcal{L}$ er sproget hørende til σ, da kaldes $\mathcal{S}$ en $\mathcal{L}$-*struktur.

4.3.2 Fortolkning af termer i en struktur

Definition 4.3.8. *Lad $\mathcal{S} = \langle E, r_k^{\mathcal{S}}, f_j^{\mathcal{S}}, c_i^{\mathcal{S}} \rangle$, være en $\mathcal{L}$-struktur, $t = t[v_1, v_2, \ldots, v_n] \in \mathcal{T}(\mathcal{L})$ og $a_1, a_2, \ldots a_n$ elementer i E. Da er* fortolkningen af t i $\mathcal{S}$, hvor de variable $v_1, v_2, \ldots, v_n$ fortolkes af elementerne $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *et element i E, skrevet*

$$t^{\mathcal{S}}[v_1 \to a_1, v_2 \to a_2, \ldots, v_n \to a_n] \textit{ eller blot } t^{\mathcal{S}}(\vec{a})$$

og defineret som følger

$$t^{\mathcal{S}}(\vec{a}) = \begin{cases} c_i^{\mathcal{S}}, & \textit{for } t = c_i \\ a_p, & \textit{for } t = v_p \\ f^{\mathcal{S}}(t_1^{\mathcal{S}}(\vec{a}), t_2^{\mathcal{S}}(\vec{a}), \ldots, t_k^{\mathcal{S}}(\vec{a})) & \textit{for } t = f(t_1, t_2, \ldots, t_k) \end{cases}$$

[4] Hvis der fx. anvendes λ-kalkyle: I termen $(\lambda v_1.(v_1 + 1))v_2$ er forekomsten af v_1 bundet af λv_1 mens v_2 er fri.

Bemærkning 4.3.9. *Definition 4.3.8 giver anledning til en afbildning* $E^n \to E$ *givet ved* $\vec{a} \mapsto t^{\mathcal{S}}(\vec{a})$.

Eksempel 4.3.10. *Betragt sproget og strukturen fra Eksempel 4.3.2. Lad* $t[v_1, v_2, v_3] = f(g(v_1, v_2), v_3)$ *være en term i sproget og* $\vec{a} = (2, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$. *Da er fortolkningen af* t *i* $\mathcal{R}$, *hvor de variable* v_1, v_2, v_3 *fortolkes af elementerne* $\vec{a} = (2, 3, 4)$

$$t^{\mathcal{R}}(\vec{a}) = (2 \cdot 3) + 4 = 10.$$

4.3.3 Tilfredsstillelse af formler; Sandhedsbegrebet

Når man skal definere om hvorvidt en formel kan siges at være sand eller ej, går det rimeligt nemt for atomiske formler, men for formler af højere kompleksitet må man i et vist omfang appellere til folks intuition.

Definition 4.3.11. *Lad* $\mathcal{S} = \langle E, r_k^{\mathcal{S}}, f_j^{\mathcal{S}}, c_i^{\mathcal{S}} \rangle$, *være en* $\mathcal{L}$*-struktur,* $F = F[v_1, v_2, \ldots, v_n] \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ *og* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *elementer i* E. *At* F tilfredsstilles af $\vec{a}$ i $\mathcal{S}$ *skrives* $\mathcal{S} \vDash F(\vec{a})$ *og defineres induktivt som følger* $(n > 0)$:

$\underline{F \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L})}$:

Hvis $F = (t_1 = t_2)$ *er* $\mathcal{S} \vDash F(\vec{a})$ *hvis* $t_1^{\mathcal{S}}(\vec{a})$ *er lig med* $t_2^{\mathcal{S}}(\vec{a})$ *i* E.
Hvis $F = r(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *er* $\mathcal{S} \vDash F(\vec{a})$ *hvis* $r(t_1^{\mathcal{S}}(\vec{a}), t_2^{\mathcal{S}}(\vec{a}), \ldots, t_n^{\mathcal{S}}(\vec{a})) \in r^{\mathcal{S}}$.

$\underline{F \in \mathcal{F}_n(\mathcal{L})}$:

Hvis $F = G \wedge H$ *er* $\mathcal{S} \vDash F(\vec{a})$ *hvis* $\mathcal{S} \vDash G(\vec{a})$ og $\mathcal{S} \vDash H(\vec{a})$.
Hvis $F = G \vee H$ *er* $\mathcal{S} \vDash F(\vec{a})$ *hvis* $\mathcal{S} \vDash G(\vec{a})$ eller $\mathcal{S} \vDash H(\vec{a})$.
Hvis $F = \neg G$ *er* $\mathcal{S} \vDash F(\vec{a})$ *hvis der* ikke gælder $\mathcal{S} \vDash G(\vec{a})$ *(skrevet* $\mathcal{S} \nvDash G(\vec{a})$*).*
Hvis $F = \exists v G$ *er* $\mathcal{S} \vDash F(\vec{a})$ *hvis der* findes $a \in E$ *sådan at*
$\mathcal{S} \vDash G[v_1 \to a_1, v_2 \to a_2, \ldots, v_n \to a_n, v \to a]$ *for* $G[v_1, v_2, \ldots, v_n, v]$.
Hvis $F = \forall v G$ *er* $\mathcal{S} \vDash F(\vec{a})$ *hvis der* for alle $a \in E$ *gælder at*
$\mathcal{S} \vDash G[v_1 \to a_1, v_2 \to a_2, \ldots, v_n \to a_n, v \to a]$ *for* $G[v_1, v_2, \ldots, v_n, v]$.

Hvis F *er lukket, altså* $FV(F) = \emptyset$, *skrives ofte blot* $\mathcal{S} \vDash F$ *og* F *siges da at være sand i* $\mathcal{S}$.

Eksempel 4.3.12. *Betragt igen strukturen* $\mathbb{R}$*,termen* t *og* $\vec{a} \in \mathcal{R}^3$ *fra Eksempel 4.3.10. Definer formlen* $F = (t = 10)$. *Da gælder* $\mathcal{R} \vDash F(\vec{a})$, *mens der fx.* ikke *gælder* $\mathcal{R} \vDash F((1, 2, 3))$, *da* $F((1, 2, 3)) = (1 \cdot 2) + 3 = 5 \neq 10$ *i* $\mathbb{R}$.
Formlen $G = \forall v_1 \forall v_2 (v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1)$ *er et eksempel på en lukket formel der er sand i* $\mathcal{R}$, *da* $\mathbb{R}$ *er en kommutativ ring.*

4.3.4 Teorier

Definition 4.3.13. *Lad* $\mathcal{L}$ *være et sprog og* T *en mængde af lukkede formler i* $\mathcal{F}(\mathcal{L})$.
Da kaldes T konsistent *hvis der findes en* $\mathcal{L}$*-struktur* $\mathcal{S}$ *sådan at* $\mathcal{S} \vDash F$ *for enhver formel* $F \in T$. *En sådan* $\mathcal{L}$*-struktur kaldes en* model *for* T *og vi skriver* $\mathcal{S} \vDash T$.
Hvis $F \in T$, *da kaldes* F *en* konsekvens *af* T *hvis* $\mathcal{S} \vDash F$ *for enhver model* $\mathcal{S}$ *for* T.
T *kaldes en* teori *hvis den er konsistent og indeholder alle sine konsekvenser.*

Bemærkning 4.3.14. *Hvis* A *er konsistent og* F *en lukket formel vil der iflg. Definition 4.3.11 aldrig gælde både* $F \in A$ *og* $\neg F \in A$.

Eksempel 4.3.15. *Hvis $\mathcal{S}$ er en $\mathcal{L}$-struktur, da defineres mængden*

$$Th(\mathcal{S}) = \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{L}) | F \text{ er lukket og } \mathcal{S} \models F\}.$$

Det er oplagt at $Th(\mathcal{S})$ er konsistent ($\mathcal{S}$ er netop en model for $Th(\mathcal{S})$) og hvis F er en konsekvens af $Th(\mathcal{S})$ gælder jo specielt at $\mathcal{S} \models F$ så $F \in Th(\mathcal{S})$. $Th(\mathcal{S})$ er altså en teori og kaldes teorien knyttet til $\mathcal{S}$.

Eksempel 4.3.16. *Hvis A er en konsistent mængde af lukkede formler og T_A mængden af alle konsevkenser af A, da er T_A en teori: For hvis $\mathcal{S} \models A$ og $F \in T_A$, da vil $\mathcal{S} \models F$ da F er en konsekvens af A; så enhver model for A er også model for T_A, specielt findes en model for T_A (da A er konsistent), så T_A er konsistent. Hvis F er en konsekvens af T_A, er F sand i enhver model for T_A, men da enhver model for A også er en model for T_A, er F også sand i enhver model for A dvs. F er en konsekvens af A; så $F \in T_A$, specielt indeholder T_A alle sine konsekvenser.*

Lemma 4.3.17. *Hvis A er en mængde af lukkede formler, da er F en konsekvens af A hvis og kun hvis $A \cup \{\neg F\}$ er inkonsistent (ikke konsistent).*

Bevis: Vi viser det kontraponerede udsagn. Iflg. Bemærkning 4.3.14 og Definition 4.3.11 er F *ikke* en konsekvens af A hvis og kun hvis der findes en model $\mathcal{S}$ for A så $\mathcal{S} \models \neg F$. Men så er $\mathcal{S}$ jo netop en model for $A \cup \{\neg F\}$, specielt *har* $A \cup \{\neg F\}$ en model og er derfor konsistent. □

Sætning 4.3.18. *Lad T være en teori i sproget $\mathcal{L}$, da er følgende udsagn ækvivalente:*

a) T er en maksimal teori mht. mængdeteoretisk inklusion.

b) For enhver lukket formel $F \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, gælder enten $F \in T$ eller $\neg F \in T$.

c) $T = Th(\mathcal{M})$ for enhver model $\mathcal{M}$ for T.

Bevis: $\underline{a) \Rightarrow b)}$: Lad $F \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ være en lukket formel og antag at $F \notin T$. Da $F \notin T$ og T er en teori, kan F ikke være en konsekvens af T. Men så følger det af Lemma 4.3.17 at $T \cup \{\neg F\}$ er konsistent, så iflg. Eksempel 4.3.16 er $T_{T\cup\{\neg F\}}$ en teori. Det er klart at $T \subseteq T_{T\cup\{\neg F\}}$, så da T er maksimal mht. inklusion må $T = T_{T\cup\{\neg F\}}$; specielt må $\neg F \in T_{T\cup\{\neg F\}} = T$.
$\underline{b) \Rightarrow c)}$: Lad $\mathcal{M}$ være en model for T. Da følger det af definitionen (Eksempel 4.3.15) af $Th(\mathcal{M})$ at $T \subseteq Th(\mathcal{M})$. Vi vil vise den anden inklusion, så lad $F \in Th(\mathcal{M})$. Hvis $F \in T$ er vi færdige, så vi antager at $\neg F \in T$ og viser at det fører til modstrid. Pr. definition af $Th(\mathcal{M})$ gælder der $\mathcal{M} \models F$, men da $\neg F \in T$ er F en konsekvens af T; specielt gælder der $\mathcal{M} \models \neg F$ dvs. $\mathcal{M} \not\models F$, hvilket giver den ønskede modstrid.
$\underline{c) \Rightarrow a)}$: Lad U være en teori indeholdende T. Da U er en teori, findes der en model $\mathcal{M}$ for U. Men da $T \subseteq U$ er $\mathcal{M}$ også en model for T, hvorfor $U \subseteq Th(\mathcal{M}) = T$, så $U = T$. Altså er T maksimal mht. mængdeteoretisk inklusion. □

Definition 4.3.19. *En teori der opfylder en af (og derfor alle) betingelserne i Sætning 4.3.18 kaldes en* fuldstændig *teori.*

Korollar 4.3.20. *For enhver $\mathcal{L}$-struktur $\mathcal{M}$ er teorien*

$$Th(\mathcal{M}) = \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{L}) | F \text{ er lukket og } \mathcal{M} \models F\}.$$

fulstændig.

Bevis: Som bemærket i Eksempel 4.3.15 er $\mathcal{M}$ en model for $Th(\mathcal{M})$. Hvis F er en lukket formel og $F \notin Th(\mathcal{M})$, så gælder $\mathcal{M} \not\models F$ dvs. $\mathcal{M} \models \neg F$, så $\neg F \in Th(\mathcal{M})$. $Th(\mathcal{M})$ er altså fuldstændig iflg. sætningen. □

Korollar 4.3.21. *Enhver teori er indeholdt i en fuldstændig teori.*

Bevis: Lad $\mathcal{M}$ være en model for teorien T. Da er T indeholdt i $Th(\mathcal{M})$, der er en fuldstændig teori iflg. ovenstående korollar. □

Korollar 4.3.22. *Hvis F er en lukket formel og A en konsistent mængde af lukkede formler, da er F en konsekvens af A hvis og kun hvis F er indeholdt i enhver fuldstændig teori der indeholder A.*

Bevis: Antag først at F er en konsekvens af A, og T er en fuldstændig teori der indeholder A. Lad $\mathcal{M}$ være en model for T. Da $A \subseteq T$ er $\mathcal{M}$ også en model for A, så $\mathcal{M} \models F$. Men så er $F \in Th(\mathcal{M}) = T$ iflg. sætningen.
Antag nu at F er indeholdt i enhver fuldstændig teori der indeholder A og lad $\mathcal{M}$ være en model for A. Så er $A \subseteq Th(\mathcal{M})$. Men så er $Th(\mathcal{M})$ jo iflg. Korollar 4.3.20 en fuldstændig teori indeholdende A, så $F \in Th(\mathcal{M})$ pr. antagelse. Dvs. $\mathcal{M} \models F$ for enhver model for A, så F er en konsekvens af A. □

Vi betragter nu mængden $\mathcal{T}$ af alle fuldstændige teorier i $\mathcal{L}$. For enhver lukket formel $F \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ defineres delmængden

$$\langle F \rangle = \{T \in \mathcal{T} | F \in T\} \subseteq \mathcal{T}.$$

For to lukkede formler F og G gælder der

$$\langle F \rangle \cap \langle G \rangle = \langle F \wedge G \rangle$$

hvilket indses nemt ved at bruge definitionen af sandhed og $\langle \cdot \rangle$. Systemet af disse mængder er altså lukket overfor fællesmængdedannelse, så hvis vi lader τ være systemet af alle mængder af formen $\bigcup_i \langle F_i \rangle$, vil τ udgøre en topologi på $\mathcal{T}$ med mængderne $\langle F \rangle$ som basis. Det indses også let at

$$\mathcal{T} \backslash \langle F \rangle = \langle \neg F \rangle$$

så basismængderne er også afsluttede. Dette giver os at τ er en Hausdorff topologi: For hvis $T \neq T'$ findes der $F \in T$ så $F \notin T'$. Derfor må $\neg F \in T'$ da T' er fuldstændig. Så $T \in \langle F \rangle$ og $T' \in \langle \neg F \rangle = \mathcal{T} \backslash \langle F \rangle$. Der gælder nu

Sætning 4.3.23. *Det topologiske rum $(\mathcal{T}, \tau)$ af fuldstændige teorier i sproget $\mathcal{L}$ er kompakt og Hausdorff* □

Vi vil ikke gå ind i beviset for kompakthed her, men blot vise nogle korollarer til sætningen.

Korollar 4.3.24. *Lad A være en mængde af lukkede formler i sproget $\mathcal{L}$. Antag at alle endelige delmængder af A er konsistente, da er A konsistent.*

Bevis: Sæt $A = \{F_i\}$. Hvis vi kan vise at $\bigcap \langle F_i \rangle \neq \emptyset$ betyder det at der findes en teori T med $A \subseteq T$. Så da T har en model, er denne også model for A. Da $\mathcal{T}$ kompakt og Haudorff er det nok at vise at alle endelige fællesmængder $\langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle \cap \ldots \cap \langle F_n \rangle$ er ikke-tomme (se fx. [Ber97] Bemærkning 6.3 s. 2.35). Men iflg. antagelsen findes der en model $\mathcal{M}$ for $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, specielt må $Th(\mathcal{M}) \in \langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle \cap \ldots \cap \langle F_n \rangle$ □

Korollar 4.3.25. *Lad A være en mængde af lukkede formler.*

a) Hvis A er inkonsistent, da findes en endelig delmængde af A der er inkonsistent.

b) Hvis formlen F er en konsekvens af A, da findes en endelig delmængde $A' \subseteq A$ så F er en konsekvens af A'.

Bevis: ad a): Fås ved blot at kontraponere Korollar 4.3.24.
ad b): Hvis er en konsekvens af A er $A \cup \{\neg F\}$ inkonsistent iflg. Lemma 4.3.17. Men så findes der iflg. a) en endelig delmængde $A' \subseteq A \cup \{\neg F\}$ der er inkonsistent. Hvis $\neg F \in A'$ følger det af Lemma 4.3.17 at F er en konsekvens af $A' \backslash \{\neg F\}$ der også er endelig. Hvis $\neg F \notin A'$, må $A' \cup \{\neg F\}$ være inkonsistent da A' er det (en model for $A' \cup \{\neg F\}$ vil også være model for A'), så F er en konsekvens af A' iflg. Lemma 4.3.17. □

4.3.5 Peano's aksiomer

Til det logiske system hører først og fremmest de logiske aksiomer og deduktionsreglerne, som er fælles for alle førsteordenssprog og alle teorier.

Definition 4.3.26. *Lad $\mathcal{L}$ være et førsteordensprog og B, C, D formler i $\mathcal{L}$. De logiske aksiomer er følgende:*

L_1 $\forall v_0 B(v_0) \Rightarrow B(t)$, *hvor t er en term og ingen variabel i t i forvejen er bundet, der hvor t indsættes.*

L_2 $\forall v_0(B \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow \forall v_0 C)$ *hvis v_0 ikke optræder frit i B.*

L_3 *Alle formler, som opnåes ved at erstatte variable med formler i en tautologi fra propositionel kalkyle.*

For at forstå meningen med L_1, hjælper det nok at se dette eksempel:

Eksempel 4.3.27. *Betragt følgende formel:*

$$\forall v_0 \exists v_1 (v_1^2 = v_0 \vee v_1^2 + v_0 = 0)$$

Denne formel er sand i de reelle tal, men hvis man fandt på at sætte $v_0 = v_1^2 + 1$ kunne man udlede

$$\exists v_1 (v_1^2 = v_1^2 + 1 \vee v_1^2 + v_1^2 + 1 = 0)$$

hvilket ikke gælder i de reelle tal. Derfor forbeholdene i aksiomet L_1.

Definition 4.3.28. *Deduktionsreglerne er følgende*

MP *Modus ponens: Af B og $B \Rightarrow C$ får man C*

GEN *Generalisation: Af B får man $\forall v_n B$, hvor $n \in \mathbb{N}$*

Definition 4.3.29. *Et formelt bevis ud fra en teori T for en formel F i det logiske system er en endelig følge $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sådan at $G_n = F$ og for hvert $i < n$ er G_i enten*

1. *et logisk aksiom*

2. *en formel i T*

3. udledt af G_j, G_k $j, k < i$ ved hjælp af en af deduktionsreglerne

Hvis der findes et bevis for F ud fra en teori T skriver man $T \vdash F$ og F kaldes da et teorem i T.

Definition 4.3.30. *En teori T siges at være* komplet *hvis der for enhver formel F gælder enten $T \vdash F$ eller $T \vdash \neg F$*

Definition 4.3.31. *En teori T siges at være* konsistent*, hvis der for alle formler gælder enten $T \nvdash F$ eller $T \nvdash \neg F$*

Desuden er deduktionslemmaet overordentligt nyttigt

Lemma 4.3.32 (Deduktionslemmaet). *Lad T være en teori og B en lukket formel, da gælder $T \vdash B \Rightarrow C$ hvis og kun hvis $T \cup \{B\} \vdash C$*

Se [Men97] p.74 for bevis.

Eksempel 4.3.33. *Hvis T er inkonsistent vil $T \vdash G$ for alle formler G Der findes nemlig en formel F så $T \vdash F$ og $T \vdash \neg F$ dermed også $T \vdash F \wedge \neg F$. Lad G være en vilkårlig formel. $F \wedge \neg F \Rightarrow G$ er en tautologi, så ved modus ponens fås $T \vdash G$.*

Peano's aksiomer er en teori i sproget $\mathcal{L_A} = \{\bar{0}, \bar{s}, \bar{+}, \bar{\times}, =\}$. Her er $\bar{0}$ et symbol for en konstant, $\bar{s}$ et symbol for en funktion af en variabel og $\bar{+}, \bar{\times}$ symboler for funktioner af to variable. Disse symboler har ikke noget af gøre med det sædvanlige nul, plus eller gangetegn, men det er klart at symbolerne er valgt på denne måde, fordi de, når de tolkes som de "rigtige" nul, plus og gange i $\mathbb{N}$ og når $\bar{s}$ tolkes som successorfunktionen, giver en model for Peano's aksiomer. Lighedstegnet er underlagt nogle faste normer og kan kun tolkes som det sædvanlige lighedstegn.

Peano's aksiomer

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall v_0 \neg \bar{s} v_0 = \bar{0} \\
(A_2) & \forall v_0 \exists v_1 (\neg v_0 = \bar{0} \Rightarrow \bar{s} v_1 = v_0) \\
(A_3) & \forall v_0 \forall v_1 (\bar{s} v_0 = \bar{s} v_1 \Rightarrow v_0 = v_1) \\
(A_4) & \forall v_0 v_0 \bar{+} \bar{0} = v_0 \\
(A_5) & \forall v_0 \forall v_1 v_0 \bar{+} \bar{s} v_1 = \bar{s}(v_0 \bar{+} v_1) \\
(A_6) & \forall v_0 v_0 \bar{\times} \bar{0} = \bar{0} \\
(A_7) & \forall v_0 \forall v_1 v_0 \bar{\times} \bar{s} v_1 = (v_0 \bar{\times} v_1) \bar{+} v_1 \\
(IS) & [F(\bar{0}) \wedge \forall v_0 (F(v_0) \Rightarrow F(\bar{s} v_0))] \Rightarrow \forall v_0 F(v_0), \\
 & \text{hvor } F(v_0) \text{ er en vilkårlig formel i } \mathcal{L_A} \text{ med } v_0 \text{ som fri variabel}
\end{array}
$$

Lad $\{A_1, \ldots, A_7, IS\} = P$ IS står for induktionsskema. Da man i IS kan indsætte en vilkårlig formel er Peano's aksiomer en uendelig teori. På den anden side er det nemt at afgøre, hvorvidt en formel er et aksiom eller ej, ved at undersøge om det enten er et af aksiomerne $A_1 - A_7$ eller om den har formen IS. Det virker klart, at der må findes en algoritme som svarer på dette spørgsmål, og det skal da også vise sig, at der findes en rekursiv funktion, som afgør, om en formel tilhører P eller ej. $\langle \mathbb{N}, 0, s, +, \times \rangle$, hvor s er successorfunktionen og 0 er det rigtige nul og $+, \times$ de sædvanlige funktioner "plus" og "gange" er en model for P. Denne model kaldes naturligt nok for *standardmodellen.*

Sætning 4.3.34. *Der findes modeller for P, som ikke er isomorfe med standardmodellen* $\mathbb{N}$

Bevis: For ethvert $n \in \mathbb{N}$ defineres en term $\underline{n} = \underbrace{\bar{s}\bar{s}\ldots\bar{s}}_{n}\bar{0}$. bestående af n $\bar{s}$'er efterfulgt af symbolet $\bar{0}$. En fortolkning af en sådan term i en $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$-struktur kaldes et standard element.

Betragt sproget

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{'} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cup \{c\}$$

hvor c er et symbol for en konstant. Lad

$$A = P \cup \{\neg c = \underline{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

A er en teori i sproget $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{'}$ For at vise, at A har en model, er det ifølge kompakthedssætningen (REF) nok at vise, at alle endelige delmængder B af A har en model. B er indeholdt i

$$P \cup \{\neg c = \underline{n} | 0 \leq n \leq m\}$$

Denne teori har en model

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, \times, c = m + 2 \rangle$$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ er også en model for P i sproget $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ (glem blot c) I denne model findes et element nemlig fortolkningen af c, som ikke er en itereret efterfølger af 0. (c kaldes et ikke-standard element). $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ er ikke isomorf med standardmodellen da alle elementer i $\mathbb{N}$ er standardelementer (itererede efterfølgere af 0). $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ er en ikke-standard model. □

Og her kommer et eksempel på, hvordan systemet fungerer:

Eksempel 4.3.35. $P \vdash \forall v_0 \bar{0} \bar{+} v_0 = v_0$

$1) \forall v_0 v_0 \bar{+} \bar{0} = v_0$	A_4
$2) \bar{0} \bar{+} \bar{0} = \bar{0}$	L_1
$3) \forall v_0 \forall v_1 v_0 \bar{+} \bar{s} v_1 = \bar{s}(v_0 \bar{+} v_1)$	A_5
$4) \bar{0} \bar{+} v_0 = v_0$	HYP
$5) \bar{0} \bar{+} \bar{s} v_0 = \bar{s}(\bar{0} \bar{+} v_0)$	A_5, L_1
$6) \bar{0} \bar{+} \bar{s} v_0 = \bar{s} v_0$	$4, 5$
$7) A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B)$	
$8) \forall v_0 (\bar{0} \bar{+} v_0 = v_0 \Rightarrow \bar{0} \bar{+} \bar{s} v_0 = \bar{s} v_0)$	$4, 6,$ *deduktionslemma, GEN*
$9) \bar{0} \bar{+} \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow ((\forall v_0 (\bar{0} \bar{+} v_0 = v_0) \Rightarrow \bar{0} \bar{+} \bar{s} v_0 = \bar{s} v_0)$	
$\Rightarrow (\bar{0} \bar{+} \bar{0} = \bar{0} \wedge \forall v_0 (\bar{0} \bar{+} v_0 = v_0 \Rightarrow \bar{0} \bar{+} \bar{s} v_0 = \bar{s} v_0)))$	$7, L_3$
$10) \bar{0} \bar{+} \bar{0} = \bar{0} \wedge \forall v_0 (\bar{0} \bar{+} v_0 = v_0 \Rightarrow \bar{0} \bar{+} \bar{s} v_0 = \bar{s} v_0)$	$2, 8, MP, MP$
$11) \forall v_0 \bar{0} \bar{+} v_0 = v_0$	$10, IS$

I dette eksempel beskrives hvert skridt i beviset, denne form for bevisførelse bliver de fleste nok hurtigt trætte af. Pointen med ovenstående eksempel er at demonstrere, at bevisførelsen rent faktisk foregår fuldstændigt automatisk, og uden videre ville kunne udføres af en maskine. Hvis man tillader sig at være lidt mindre stringent, kan man rimeligt hurtigt vise, at $\bar{+}$ er kommutativ og andre lidt mere interessante resultater. Man kan i princippet vise alle kendte sætninger i aritmetikken på denne måde, selv om det nok ville tage lang tid at vise Fermat-Wiles sætning.

Lad P_0 være teorien som består af aksiomerne $A_1, A_2, \ldots, A_7$. P_0 har den fordel frem for P, at det er en endelig teori, men bortset fra det, er den meget "svag", man kan ikke engang vise at $\bar{+}$ er kommutativ.

4.3.6 Repræsentation

Definition 4.3.36. *Lad f være en funktion fra $\mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ og $F[v_0, v_1, \ldots, v_p]$ en formel. Men siger, at $F[v_0, v_1, \ldots, v_p]$* repræsenterer f i en teori $T \subseteq P_0$*, hvis der for alle $(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ gælder:*

$$T \vdash \forall v_0(F[v_0, \underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_p] \Leftrightarrow v_0 = \underline{f(n_1, \ldots, n_p)})$$

Hvor $\underline{n}$ er en forkortelse for termen $\underbrace{\bar{s}\bar{s}\ldots\bar{s}}_{n}\bar{0}$.

Det vil sige, hvis $\mathcal{M}$ er en model for T og v_0 et element, som opfylder F, så er v_0 fortolkningen af termen $\underline{f(n_1, \ldots, n_p)}$, altså der er netop et element, som opfylder F.

Eksempel 4.3.37.

- *Successor-funktionen kan repræsenteres af $v_0 = \bar{s}v_1$.*

$$P_0 \vdash \forall v_0(v_0 = \bar{s}\underline{n}_1 \Leftrightarrow \underline{sn_1})$$

skal være opfyldt. Per definition er

$$\bar{s}\underline{n}_1 = \underbrace{\bar{s}\bar{s}\ldots\bar{s}}_{n_1+1}\bar{0} \text{ og } \underline{sn_1} = \underline{n_1+1} = \underbrace{\bar{s}\bar{s}\ldots\bar{s}}_{n_1+1}\bar{0}$$

så resultatet er trivielt.

- *Den konstante funktion kan repræsenteres ved $v_0 = \underline{n}$.*
- *Projektionerne $P_p^i(n_1, \ldots, n_p) = n_i$ kan repræsenteres ved $v_0 = v_i$*

Faktisk gælder der:

Sætning 4.3.38 (Repræsentationssætningen). *Alle totale,rekursive funktioner kan repræsenteres i T, hvor T er en vilkårlig teori, som indeholder P_0.*

Se [Las94] p.77 og 96 for bevis.

Definition 4.3.39. *En mængde $A \subseteq \mathbb{N}^p$ siges at være* repræsenteret i $T \supseteq P_0$ af en formel *$F[v_1, \ldots, v_p]$ hvis der for alle $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ gælder*

- $(n_1, \ldots, n_p) \in A \Rightarrow T \vdash F[\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_p]$
- $(n_1, \ldots, n_p) \notin A \Rightarrow T \vdash \neg F[\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_p]$

Bemærk, at det ikke er ækvivalent med $(n_1, \ldots, n_p) \in A \Leftrightarrow T \vdash F[\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_p]$ idet negationen af $T \vdash F[\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_p]$ er $T \nvdash F[\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_p]$.

Lemma 4.3.40. *En mængde $A \subseteq \mathbb{N}^p$ kan repræsenteres hvis og kun hvis dens indikatorfunktion kan repræsenteres.*

Bevis: Hvis F repræsenterer A, vil denne formel

$$(F[v_1, \ldots, v_p] \wedge v_0 = 1) \vee (\neg F[v_1, \ldots, v_p] \wedge v_0 = 0)$$

repræsentere 1_A. Omvendt, hvis $G[v_0, v_1, \ldots, v_p]$ repræsenterer 1_A, så vil $G[\underline{1}, v_1, \ldots, v_p]$ repræsentere A, fordi,

$$P_0 \vdash \forall v_0(G[v_0\underline{n}_1, \ldots, \underline{n}_p] \Leftrightarrow v_0 = \underline{1_A(n_1, \ldots, n_p)})$$

Substituer v_0 med $\underline{1}$ så fås

$$P_0 \vdash (G[\underline{1}\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_p] \Leftrightarrow \underline{1_A(n_1, \dots, n_p)} = \underline{1})$$

Så hvis $(n_1, \dots, n_p) \in A$ da er $\underline{1_A(n_1, \dots, n_p)} = \underline{1}$ så da

$$P_0 \vdash \underline{1} = \underline{1}$$

følger ved modus ponens at

$$P_0 \vdash G[\underline{1}, \underline{n}_1, \dots, \underline{n}_p].$$

Hvis $(m_1, \dots, m_p) \notin A$ er $\underline{1_A(m_1, \dots, m_p)} = \bar{0}$ og da

$$P_0 \vdash \underline{1} \neq \bar{0}$$

følger ved modus ponens, at

$$P_0 \vdash \neg G[\underline{1}, \underline{m}_1, \dots, \underline{m}_p].$$

□

Da en mængde er rekursiv netop når dens indikatorfunktion (som altid er total) er rekursiv, gælder altså:

Sætning 4.3.41. *Hvis $A \subseteq \mathbb{N}^p$ er rekursiv, da kan A repræsenteres i $T \supseteq P_0$.*

4.3.7 Gödelnumre

Beviset for Gödels første ufuldstændighedssætning bygger på en oversættelse af formler i sproget $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ til naturlige tal. Hertil benyttes den i sætning 4.1.7 indførte funktion $\alpha_3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$.

Definition 4.3.42. *For enhver term t i sproget $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ defineres Gödelnummeret $\#t$ induktivt ved*

$$\#t = \begin{cases} \alpha_3(0,0,0) & t = \bar{0} \\ \alpha_3(n+1,0,0) & t = v_n \\ \alpha_3(\#t_1, 0, 1) & t = \bar{s}t_1 \\ \alpha_3(\#t_1, \#t_2, 2) & t = t_1 \bar{+} t_2 \\ \alpha_3(\#t_1, \#t_2, 3) & t = t_1 \bar{\times} t_2 \end{cases}$$

Tildelingen af Gödelnumre til termer er injektiv og et naturlig tal kan derfor ikke optræde, som Gödelnummer for flere forskellige termer.

For mængden $Term = \{\#t | \text{t er en term i } \mathcal{L}_\mathcal{A}\}$ gælder

Lemma 4.3.43. *Mængden $Term$ er en primitiv rekursiv delmængde af $\mathbb{N}$.*

Bevis: Vi skal vise, at indikatorfunktionen $f = 1_{Term}$ er en primitiv rekursiv funktion. Vælg hertil et $x \in \mathbb{N}$. Hvis $x = 0$, eller $x = 1$ er $f(x) = 1$, thi termerne $t = \bar{0}$ og $t = \bar{s}(0)$ har Gödelnummer hhv. 0 og 1. For alle andre tilfælde betragtes, i overensstemmelse med sætning 4.1.7, $\beta_3^1(x)$, $\beta_3^2(x)$ og $\beta_3^3(x)$. Definition 4.3.42 fortæller, at
for $\beta_3^3(x) = 0$ er

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \beta_3^2(x) \neq 0 \\ 1 & \beta_3^2(x) = 0 \end{cases}$$

for $\beta_3^3(x) = 1$ er

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \beta_3^2(x) \neq 0 \\ f(\beta_3^1(x)) & \beta_3^2(x) = 0 \end{cases}$$

for $\beta_3^3(x) = 2$, $\beta_3^3(x) = 3$ er

$$f(x) = f(\beta_3^1(x))f(\beta_3^2(x))$$

og for $\beta_3^3(x) > 3$ er $f(x) = 0$. For ethvert $p = 1, 2, \ldots$ og for ethvert $i = 1, \ldots, p$ gælder $\beta_p(x) < x$, når blot $x > 0$. I tilfældet $p = 2$ følger det nemlig umiddelbart af formlen for α_2, og for $p > 2$ fås induktivt

$$\begin{aligned} \beta_p^i(x) &= \beta_p^i(x) < x \qquad 1 \leq i \geq p-2 \\ \beta_p^{p-1}(x) &= \beta_p^1(\beta_{p-1}^{p-1}(x)) < \beta_{p-1}^{p-1}(x)\beta_{p-1}^{p-1}(x) < x \\ \beta_p^p(x) &= \beta_p^2(\beta_{p-1}^{p-1}(x)) < \beta_{p-1}^{p-1}(x) < x. \end{aligned}$$

I kraft af uligheden $\beta_3^i(x) < x$, $i = 1, 2, 3$ er det nu klart, at værdierne for f er fastlagt på en veldefineret måde, og da $\beta_3^i(x)$ alle er primitive rekursive, er f det også.

□

Ud fra Gödelnumre for termer kan vi også give mening til Gödelnummeret for en lukket formel i $\mathcal{L}_\mathcal{A}$.

Definition 4.3.44. *Lad t_1 og t_2 være termer i $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ og lad F være en lukket formel. Ved Gödelnummeret $\#F$ for F forstås*

$$\#F = \begin{cases} \alpha_3(\#t_1, \#t_2, 0) & F = (t_1 = t_2) \\ \alpha_3(\#F_1, 0, 1) & F = \neg F_1 \\ \alpha_3(\#F_1, \#F_2, 2) & F = F_1 \wedge F_2 \\ \alpha_3(\#F_1, \#F_2, 3) & F = F_1 \vee F_2 \\ \alpha_3(\#F_1, \#F_2, 4) & F = F_1 \Rightarrow F_2 \\ \alpha_3(\#F_1, \#F_2, 5) & F = F_1 \Leftrightarrow F_2 \\ \alpha_3(\#F_1, n, 6) & F = \forall v_n F_1 \\ \alpha_3(\#F_1, n, 7) & F = \exists v_n F_1. \end{cases}$$

Som med Gödelnumre for termer, er tildelingen af Gödelnumre til lukkede formler injektiv og ved et tilsvarende argument, som i beviset for lemma 4.3.43 fås:

Lemma 4.3.45. *Mængden $Form = \{\#f | F er\ en\ lukket\ formel\}$ er en primitiv rekursiv mængde.*

4.3.8 Afgørlighed

For en mængde A af lukkede formler i $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ betragter vi mængden $\#A$ bestående af Gödelnumre for formler i A.

Definition 4.3.46. *En teori T kaldes rekursivt aksiomatiserbar, hvis $T = T_A$ hvor $\#A$ er rekursiv, og afgørlig hvis $\#T$ er rekursiv.*

At en teori er rekursiv aksiomatiserbar betyder, at vi effektivt - med en computer f.eks. - kan bestemme en delmængde $A \subseteq T$ så A bliver et aksiomsæt for T. Der gælder:

Sætning 4.3.47. *For enhver rekursivt aksiomatiserbar teori T i $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ er $\#T$ rekursivt numerabel.*

Se [Las94] p. 88 for bevis.

Med denne sætning kan vi vise:

Sætning 4.3.48. *Hvis en rekursivt aksiomatiserbar teori T i $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ er fuldstændig, er T afgørlig.*

Bevis: Idet $\#T$ er rekursivt numerabel, er $\#T$ rekursiv og derfor også afgørlig, hvis $\mathbb{N}\backslash\#T$ er rekursivt numerabel, jvf. lemma 4.2.7. For ethvert $m \notin \#T$ foreligger to muligheder:
1) Tallet m er Gödelnummer for en lukket for F, som ikke ligger i T. Da T er fuldstændig må så $\neg F \in T$, dvs. $\alpha_3(m,0,1) \in \#T$.
2) Tallet m er ikke et Gödelnummer for en lukket formel, hvorfor $m \notin Form$.
Altså gælder samlet

$$m \in \mathbb{N}\backslash\#T \Leftrightarrow \big(m \in \mathbb{N}\backslash Form \vee \alpha_3(m,0,1) \in \#T\big).$$

Mængden $Form$ er primitivt rekursiv, hvorfor det samme er tilfældet med $\mathbb{N}\backslash Form$. Specielt er $\mathbb{N}\backslash Form$ altså rekursivt numerabel og da tillige $\#T$ er rekursivt numerabel står der at læse, at $\mathbb{N}\backslash\#T$ er rekursivt numerabel. □

Teorierne $T_\varnothing$ og P_0 er begge frembragt af et endelig aksiomsystem og derfor rekursivt aksiomatiserbarer. Tillige kan det vises, at også P er rekursivt aksiomatiserbar. Med sætning 4.3.47 fås også, at $\#T_\varnothing$, $\#P_0$ og $\#P$ alle er rekursivt numerable. I lyset heraf er det interessant at undersøge om også $T_\varnothing$, P_0 og P er afgørlige. Hertil viser vi følgende vigtige sætning.

Sætning 4.3.49. *Enhver teori T i sproget $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ som indeholder P_0 er uafgørlig.*

Bevis: Antag T er en afgørlig teori der indeholder P_0. Per definition er så $\#T$ rekursiv. Lad $F[v_0]$ betegne formler med netop en variabel og betragt mængden

$$V = \big\{(m,n)|m = \#F[v_0], \quad T \vdash F[\underline{n}]\big\}.$$

Idet T er antaget at være rekursiv kan det vises, at også V er rekursiv. Se [Las94] p. 89. Med Repræsentationssætningen 4.3.38 findes nu en formel $V[v_0,v_1]$, som repræsenterer V, dvs. der gælder

$$\begin{aligned} (m,n) \in V &\quad\Rightarrow\quad P_0 \vdash V(\underline{m},\underline{n}) \\ (m,n) \notin V &\quad\Rightarrow\quad P_0 \vdash \neg V(\underline{m},\underline{n}). \end{aligned}$$

Betragtes $G[v_0] = \neg V[v_0,v_0]$ og $a = \#G[v_0]$, gælder der for den lukkede formel $G[\underline{a}]$ enten $P_0 \vdash G[\underline{a}]$, eller $P_0 \vdash \neg G[\underline{a}]$, og da $P_0 \subseteq T$ må $T \vdash G[\underline{a}]$, eller $T \vdash \neg G[\underline{a}]$.
Hvis $T \vdash G[\underline{a}]$ gælder

$$\begin{aligned} (a,a) \in V &\quad\Rightarrow\quad P_0 \vdash V[\underline{a},\underline{a}] \\ &\quad\Leftrightarrow\quad P_0 \vdash \neg G[\underline{a}] \\ &\quad\Rightarrow\quad T \vdash \neg G[\underline{a}] \end{aligned}$$

og hvis $T \vdash \neg G[\underline{a}]$ gælder

$$\begin{aligned} (a,a) \notin V &\quad\Rightarrow\quad P_0 \vdash \neg V[\underline{a},\underline{a}] \\ &\quad\Leftrightarrow\quad P_0 \vdash G[\underline{a}] \\ &\quad\Rightarrow\quad T \vdash G[\underline{a}] \end{aligned}$$

Altså i begge tilfælde en modstrid. Dvs. T må være afgørlig. □

Som korollar fås nu umiddelbart

Korollar 4.3.50. *Teorierne P_0 og P er uafgørlige.*

Tilbage står spørgsmålet om den tomme teori $T_\varnothing$ bestående af alle overalt sande, lukkede formler er afgørlig. Svaret er nej:

Sætning 4.3.51. *Churchs sætning. Teorien $T_\varnothing$ er uafgørlig.*

Bevis: Lad $G = A_1 \wedge \ldots \wedge A_7$ være konjunktionen af de 7 aksiomer i P_0. For enhver lukket formel F i $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ må der gælde

$$\begin{aligned} P_0 \vdash F \quad &\Leftrightarrow \quad G \vdash F \Leftrightarrow \varnothing \vdash (G \Rightarrow F) \\ &\Rightarrow \quad \#(G \Rightarrow F \in \#T_\varnothing, \end{aligned}$$

idet Deduktionslemmaet 4.3.32 er benyttet undervejs.

Udtrykt ved Gödelnumre står der at læse

$$\begin{aligned} \#F \in \#P_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \#(G \Rightarrow F) \in T_\varnothing \\ &\Leftrightarrow \quad \#(\neg G \vee F) \in T_\varnothing \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha_3(\#(\neg G), \#F, 3) \in T_\varnothing, \end{aligned}$$

hvilket fortæller at $\#T_\varnothing$ er en rekursiv mængde netop hvis $\#P_0$ er det. Med korollar 4.3.50 bliver konklusionen derfor, at $\#T_\varnothing$ ikke er rekursiv og $T_\varnothing$ er derfor uafgørlig. □

4.3.9 Gödels første ufuldstændighedssætning

Med den nu opbyggede teori kan vi nemt vise

Sætning 4.3.52. *Gödels første ufuldstændighedssætning. Enhver rekursiv aksiomatiserbar teori T, som indeholder P_0 er ikke fuldstændig.*

Bevis: Da T indeholder P_0 er T uafgørlig og derfor ikke fuldstændig, jvf. sætning 4.3.49 og sætning 4.3.48. □

Gödels sætning er særlig interessant, fordi den fortæller, at der inden for aritmetikken findes lukkede formler F, forhvilket hverken F eller $\neg F$ kan bevises. Stillet overfor et uløst talteoretisk problem, f.eks. Goldbachs formodning, foreligger altså altid den mulighed, at problemet hverken lader sig bevise eller modbevise inden for den aksiomatisering talteorien er bygget på.

Kapitel 5

Banach–Tarskis Paradoks

Afsnit 5.1 og 5.2 af Esben M. Flachs, afsnit 5.3 - 5.5 af Stefan Holm

Banach–Tarskis paradoks som kapitlet omhandler er ikke et paradoks, men en sætning som kan vises ved brug af udvalgsaksiomet. Den vinkel der er lagt på emnet i denne gennemgang koncentrerer sig om resultatet anvendt på en kugle i $\mathbb{R}^3$, der ifølge en sætning af Banach–Tarski kan deles i et endeligt antal stykker, som derefter kan samles til to kugler, der hverisær er identiske med udgangskuglen.

5.1 Frie Grupper

For at vise Banach–Tarskis paradoks må vi først definere og vise nogle fundamentale resultater om en speciel klasse af grupper, de frie grupper.

Definition 5.1.1. *Lad S være en endelig mængde. Vi definerer da et ord u på S som en endelig følge af elementer fra S. Altså har u formen $s_1 s_2 \cdots s_m$, med $m \in \mathbb{N}$. Elementerne $s_1 \cdots s_m$ kaldes bogstaverne i u. Længden af et ord $l(u)$ sættes til antallet af bogstaver i u.*

Definition 5.1.2. *Mængden af ord på den endelige mængde S betegnes med W. Det tomme ord siges også at tilhøre W, og vi betegner dette med e. I denne defineres produktet $*$ af to ord u, v som tilføjelsen af v til u. Dvs. for $u = s_1 \cdots s_m$ og $v = s'_1 \cdots s'_n$ er $u*v = s_1 \cdots s_m \cdot s'_1 \cdots s'_n$.*

Det kan her bemærkes, at W oplagt er stabil overfor $*$, og operationen $*$ er associativ. Desuden er det tomme ord e neutralt element ved $*$, da følgende gælder for alle $u \in W$:

$$u * e = e * u = u$$

Dermed er W en semigruppe, og kaldes den fri semigruppe frembragt af S.

Sætning 5.1.3. *Lad S være en endelig mængde og lad $(G, \dot{})$ være en vilkårlig gruppe. Lader vi W være den fri semigruppe frembragt af S, da kan enhver afbildning $f : S \to G$ udvides til netop en semigruppehomomorfi $\phi : W \to G$.*

Bevis: Lader vi $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ vil f være givet ved sine værdier på $s_1, \ldots, s_n$ og vi sætter disse til $f(s_i) = t_i$ for $i \in \{1, \ldots, n\}$. For et ord $u = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ defineres ved

$$\phi(u) = f(s_{i_1}) \cdots f(s_{i_m}) = t_{i_1} \cdots t_{i_m} \text{ og } \phi(e) = e_G$$

en afbildning fra W til G. Denne opfylder oplagt kravende til en semigruppehomomorfi. Da vi kan bemærke, at bogstaver i S specielt er ord i W er denne definition den eneste mulige, og ϕ dermed entydig. □

Vi kan selvfølgelig specielt vælge S som en delmængde af en gruppe G og som f benytte indlejringen I af S i G givet ved $I(s) = s$. Hvis den som i sætningen udvidede afbildning $\tilde{I}$ er injektiv kaldes S et frit frembringersæt for semiundergruppen $\tilde{I}(W)$ i G. I dette tilfælde vil vi kalde $\tilde{I}(W)$ for en fri semigruppe.

Hvis vi nu betragter mængden $\tilde{S} = \{s_1, s_1^{-1}, \ldots, s_n, s_n^{-1}\}$, hvor $s_1, \ldots, s_n$ tilhører S, og den tilhørende $(W', *)$, kan vi indføre en ækvivalensrelation $\sim$ i W' ved følgende fastsættelse. For to elementer $u, v \in W'$ gælder at $u \sim v$ hvis der findes $w_1, \ldots, w_m \in W$, så $u = w_1$ og $v = w_m$. Desuden dannes w_{i+1} udfra w_i ved at tilføje eller fjerne et sidestillet par ss^{-1} eller $s^{-1}s$.

Definition 5.1.4. *Vi siger at et ord $u \in W'$ er reduceret, hvis der for alle $v \in W'$ gælder*

$$u \sim v \Rightarrow l(u) \leq l(v)$$

Nu kan vi anføre følgende sætning uden bevis.

Sætning 5.1.5. *Et ord $u \in W'$ er ækvivalent med et entydigt bestemt reduceret ord. Hvis $u \sim u'$ og $v \sim v'$ i W', da er også $u * v \sim u' * v'$.*

Vi har dermed udfra $*$ en veldefineret komposition $\cdot$ i kvotientmængden af reducerde ord, som vi fremover vil kalde F, givet ved $[u] \cdot [v] = [u * v]$ for $[u], [v] \in F$. Hvis vi nu lader $(s^{-1})^{-1} = s$ for $s \in S$, er $(F, \cdot)$ en gruppe med neutralt element $[e]$ og inverst element $[u]^{-1} = s_n^{-1} \cdots s_1^{-1}$.

Den herved frembragte gruppe kaldes den frie gruppe frembragt af S. Ligesom for frie semigrupper kan vi entydigt udvide enhver afbildning $f : S \to G$ til en gruppehomomorfi $\phi : F \to G$.

Specielt kan vi igen betragte indlejringen I af S i G. Hvis udvidelsen af denne til $\tilde{I}$ er surjektiv siges S at være frembringer sæt for G. Hvis $\tilde{I}$ er injektiv siges $\tilde{I}(S)$ at være fri.

Sætning 5.1.6. *Hvis S og T er to forskellige frembringersæt for den samme frie gruppe vil $|S| = |T|$.*

Beviset udelades.

Med denne sætning giver følgende definition mening

Definition 5.1.7. *For en endelig mængde S sættes rangen af den frie gruppe frembragt af S til $|S|$.*

Med dette kan vi nu kombineret med den entydige udvidelse af afbildninger fra $S \to G$, slutte, at der op til isomorfi findes netop en fri gruppe af rang n, for hvert $n \in \mathbb{N}$. Vi vil betegne denne med $\mathbf{F}_n$.

5.2 Paradoksale grupper

Definition 5.2.1. *Lad X være en mængde og lad gruppen G virke på M. En delmængde N af X kaldes G-paradoksal, hvis der findes parvist disjunkte delmængder $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \subseteq$*

N og $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ så

$$N = \bigcup_{i=1}^{m} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{n} h_j B_j$$

Hvis en undergruppe H af G er G-paradoksal ved venstretranslation siges H at være paradoksal.

Sætning 5.2.2. *Den frie gruppe $\mathbf{F}_2$ er paradoksal.*

Bevis: Lad $\mathbf{F}_2$ være frembragt af elementerne s, t og lad $W(a)$ være mængden af ord, der starter med $a \in \{s, t, s^{-1}, t^{-1}\}$. Nu er oplagt

$$e \cup W(s) \cup W(t) \cup W(s^{-1}) \cup W(t^{-1})$$

en parvist disjunkt overdækning af $\mathbf{F}_2$. Desuden gælder

$$\mathbf{F}_2 = W(s) \cup sW(s^{-1}) = W(t) \cup tW(t^{-1})$$

da, hvis $h \in \mathbf{F}_2 \backslash W(s)$, da vil $s^{-1}h \in W(s^{-1})$. Dermed må $h \in sW(s^{-1})$. Et lignende argument viser $\mathbf{F}_2 = W(t) \cup tW(t^{-1})$. □

Lemma 5.2.3. *Lad gruppen G virke på den ikke tomme mængde X. Banerne for G er $G_x = \{gx | g \in G\}$, og disse udgør en klassedeling af X.*

Beviset er oplagt og udelades.

Sætning 5.2.4. *Lad G være en paradoksal gruppe, der virker på en ikke tom mængde X, således at der ikke findes ikke-trivielle fikspunkter. Da vil X være G-paradoksal.*

Bevis: Lad $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \subseteq G$ og $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ gøre G paradoksal. Lad u være en udvalgsfunktion på $\mathcal{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$, og lad nu

$$M = \bigcup_{x \in X} \{u(G_x)\}.$$

Det ses at $(g(M))_{g \in G}$ udgør en parvis disjunkt overdækning af X, thi hvis $x \in X$ vil der ved lemma (5.2.3) findes $x_0 \in M$ så $x \in G_{x_0}$, men da findes $g_0 \in G$ så $x = g_0 x_0$. Altså vil $x \in g_0(M)$. Antag nu at $g_1(M) \cap g_2(M) \neq \emptyset$ for $g_1, g_2 \in G$. Da eksisterer $m_1, m_2 \in M$ så $g_1 m_1 = g_2 m_2$, og derfor vil $g_2^{-1} g_1 m_1 = m_2$. Altså må m_1 og m_2 ligge i samme bane, og per konstruktion af M må $m_1 = m_2$. Da antagelsen er at G virker på X uden ikke-trivielle fikspunkter, må $g_2^{-1} g_1 = e$, og altså er $g_1 = g_2$.
Lad nu

$$A_i^* = \bigcup_{g \in A_i} g(M) \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq m$$

$$B_j^* = \bigcup_{g \in B_j} g(M) \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq n$$

Det ses at disse mængder er parvis disjunkte idet $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ per antagelse er parvis disjunkte og $(g(M))_{g \in G}$ udgør en parvis disjunkt overdækning af X. Vi har nu at

$$\bigcup_{i=1}^{m} g_i(A_i^*) = \bigcup_{i=1}^{m} g_i \left(\bigcup_{g \in A_i} g(M) \right) \overset{(1)}{=} \bigcup_{g \in G} g(M) \overset{(2)}{=} X$$

$$\bigcup_{j=1}^{n} g_j(B_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} g_j \left(\bigcup_{g \in B_j} g(M) \right) \overset{(1)}{=} \bigcup_{g \in G} g(M) \overset{(2)}{=} X.$$

Hvor (1) følger af at G er paradoksal, og (2) følger af at $(g(M))_{g\in G}$ er en overdækning af X. Dette viser at X er G-paradoksal. □

Korollar 5.2.5. *Lad G være en gruppe, der indeholder en paradoksal undergruppe H. Da er G paradokdsal.*

Bevis: Da H virker på G ved venstretranslation uden ikke trivielle fikspunkter, er sætningen en direkte konsekvens af sætning (5.2.4). □

5.3 Hausdorffs Paradoks

Vi er nu klar til paradokserne — der som nævnt ikke er paradokser, men i stedet konsekvenser af udvalgsaksiomet. Vi starter med Hausdorffs Paradoks, der *næsten* siger at S^2 er SO_3-paradoksal (SO_3 er gruppen af drejninger om origo i $\mathbb{R}^3$). Men først lidt opvarmning.

Lemma 5.3.1. *SO_3 har en fri undergruppe af rang 2.*

Beviset for dette lemma er nogenlunde ligetil, men for omfangsrigt til at vi vil gennemføre det i denne tekst. Den grundliggende idé er at finde to passende elementer $\varphi, \rho \in SO_3$ og vise at disse frembringer en fri undergruppe i SO_3. Eksempelvis kan bruges

$$\varphi = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Vi ved altså at SO_3 har en paradoksal undergruppe, der virker på S^2 på oplagt vis. Desværre har enhver ikke-triviel drejning af S^2 om origo 2 ikke-trivielle fikspunkter, nemlig skæringspunkterne mellem rotationsaksen og S^2, så vi kan ikke i første omgang slutte, at S^2 er SO_3-paradoksal, men vi kan komme tæt på.

Sætning 5.3.2 (Hausdorffs paradoks). *Der findes en tællelig mængde $D \subset S^2$, så $S^2 \setminus D$ er SO_3-paradoksal.*

Bevis: Vi lader F betegne undergruppen af SO_3 fra lemma 5.3.1, og lader D være mængden af fikspunkter for $F \setminus \{Id\}$ på S^2. Oplagt vil D være tællelig, da F er tællelig.

At F virker på $S^2 \setminus D$, ses også let, for antag der findes $P \in S^2 \setminus D$ og $w \in F \setminus \{Id\}$, så $w(P) \in D$. Da er $w(P)$ altså fikspunkt for et passende $v \in F \setminus \{Id\}$, så altså $vw(P) = w(P)$ og dermed $w^{-1}vw(P) = P$. Men så må $P \in D$, hvilket er i modstrid med at $P \in S^2 \setminus D$.

Vi har altså i alt at F virker på $S^2 \setminus D$, og da det pr. konstruktion er uden ikke-trivielle fikspunkter, giver sætning 5.2.4 at $S^2 \setminus D$ er F-paradoksal og dermed særligt SO_3-paradoksal. □

5.4 Ækvidekomponerbarhed

Vi skal her omtale et begreb, der knytter sig tæt til paradoksalitet af mængder og i det hele taget til Banach-Tarskis paradoks.

Definition 5.4.1. *Lad G være en gruppe, der virker på en mængde X, og lad A og B være delmængder af X. Da siges A at være G-*ækvidekomponerbar *med B, hvis der findes en klassedeling $\{A_1, \dots, A_n\}$ af A, en klassedeling $\{B_1, \dots, B_n\}$ af B og elementer $g_1, \dots, g_n \in G$, så $g_i(A_i) = B_i$ for $1 \leq i \leq n$.*

Vi skriver $A \sim_G B$, hvis A er G-ækvidekomponerbar med B.

Sætning 5.4.2. *Lad gruppen G virke på mængden X. Da er $\sim_G$ en ækvivalensrelation i $\mathcal{P}(X)$.*

Bevis: Vi skal vise tre ting:

Refleksivitet Oplagt, da $e(A) = A$, hvis e er neutralelementet i G.

Symmetri Hér kan vi blot udnytte at $g_i(A_i) = B_i$ medfører $g_i^{-1}(B_i) = A_i$.

Transitivitet Antag for $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ at $A \sim_G B \sim_G C$. Altså findes mængder $A_1, \dots, A_n$ og $B_1, \dots, B_m$ samt gruppeelementer $g_1, \dots, g_n$ og $h_1, \dots, h_m$, så A_i'erne klassedeler A, B_i'erne klassedeler B, $g_i(A_i)$'erne klassedeler B og $h_i(B_i)$'erne klassedeler C. Sætter vi nu $A_{ij} = g_j^{-1}(B_i \cap g_j(A_j))$, vil A_{ij}'erne klassedele A og $h_i g_j(A_{ij})$'erne vil klassedele C, så $A \sim_G C$.

□

Bemærkning 5.4.3. *Lad $E \subseteq X$. Da er E G-paradoksal netop hvis den er G-ækvidekomponerbar med disjunkte delmængder af sig selv. Altså hvis der findes $A, B \subseteq E$, så $A \sim_G E \sim_G B$ og $A \cap B = \emptyset$.*

Endnu en vigtig sammenhæng mellem ækvidekomponerbarhed og paradoksabilitet skal nævnes:

Sætning 5.4.4. *Lad X være en mængde, og lad G være en gruppe, der virker på X. Lad endvidere $E, E' \subseteq X$ være givet, så $E \sim_G E'$. Hvis E er G-paradoksal, vil også E' være G-paradoksal.*

Bevis: Da E er G-paradoksal, kan vi finde disjunkte $A, B \subseteq E$, så $A \sim_G B \sim_G E$. Da $E \sim_G E'$ kan vi finde en klassedeling $E_1, \dots, E_n$ af E og elementer $g_1, \dots, g_n \in G$, så $g_1(E_1), \dots, g_n(E_n)$ er en klassedeling af E'.

Vi sætter nu

$$A' = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A \cap E_i)$$

og

$$B' = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(B \cap E_i)$$

og vil vise at disse udgør en paradoksal inddeling af E', altså at $A' \cap B' = \emptyset$ og $A' \sim_G B' \sim_G E'$.

Antag først at $x \in A' \cap B'$. Da findes i og j så $x \in g_i(A \cap E_i) \cap g_j(B \cap E_j) \subseteq g_i(E_i) \cap g_j(E_j)$. Da $g_i(E_i)$'erne udgør en klassedeling af E', må altså $i = j$. Men så må $g_i^{-1}(x) \in A \cap B = \emptyset$. Altså må $A' \cap B' = \emptyset$.

Da $g_i(E_i)$'erne er parvist disjunkte, får vi $g_i(A \cap E_i) \cap g_j(A \cap E_j) = g_i(B \cap E_i) \cap g_j(B \cap E_j) = \emptyset$ når $i \neq j$. Men så må der jo gælde

$$A' = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A \cap E_i) \sim_G \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i) = A \sim_G E \sim_G E'$$

og

$$B' = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(B \cap E_i) \sim_G \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap E_i) = B \sim_G E \sim_G E'$$

Da altså A' og B' er disjunkte delmængder af E' og $A' \sim_G B' \sim_G E'$, er E' G-paradoksal.

$\square$

5.5 Banach-Tarskis Paradoks

Vi er nu klar til at kaste os over selve hovedindholdet i dette kapitel, nemlig Banach og Tarskis berømte sætning. Vi vil vise den i to udgaver, nemlig for S^2 og for hele den massive enhedskugle. Det interessante ved Banach-Tarskis paradoks (og Hausdorffs paradoks for den sags skyld) er at alt foregår med isometrier, og det er velkendt at Lebesgue-målet er invariant under isometrier. Så for at der ikke skal være noget *ægte* paradoks involveret, er det nødvendigt, at de mængder, vi opdeler kugler og sfærer i, ikke er lebesgue-målelige.

Lemma 5.5.1. *Lad $D \subset S^2$ være tællelig. Da gælder $S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$.*

Bevis: Da S^2 er overtællelig, kan vi finde en linje, ℓ, gennem origo, der ikke skærer D noget sted. Vi vælger en fast omløbsretning om ℓ og lader $R_{(\theta,\ell)}$ betegne rotationen omkring ℓ med vinkel θ.

Vi definerer nu

$$\begin{aligned} A =&\{\theta \in [0,2\pi] | \exists n \in \mathbb{N} \exists P \in D : (R_{(\theta,\ell)})^n(P) \in D\} \\ =&\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{P\in D} \{\theta \in [0,2\pi] | (R_{(\theta,\ell)})^n(P) \in D\} \end{aligned}$$

Idet $\{\theta \in [0,2\pi] | (R_{(\theta,\ell)})^n(P) \in D\}$ er tællelig for fast n og P, vil A være en tællelig mængde, så vi kan vælge $\theta_0 \in [0,2\pi] \setminus A$. Vi sætter $\rho = R_{(\theta_0,\ell)}$.

Vi har konstrueret ρ, så $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ for $n \in \mathbb{N}$, så for $0 \leq n < m$ gælder $\rho^{m-n}(D) \cap D = \emptyset$, hvoraf $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \emptyset$.

Vi sætter nu

$$D' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \rho^n(D),$$

hvor der altså må gælde $\rho(D') = D' \setminus D$. Heraf følger så

$$S^2 = (S^2 \setminus D') \cup D' \sim_{SO_3} (S^2 \setminus D') \cup \rho(D') = (S^2 \setminus D') \cup (D' \setminus D) = S^2 \setminus D,$$

hvilket var det ønskede. $\square$

Sætning 5.5.2 (Banach-Tarskis paradoks, version 1). *Enhedssfæren S^2 i $\mathbb{R}^3$ er SO_3-paradoksal.*

Bevis: Hausdorffs paradoks giver at der findes en tællelig delmængde $D \subset S^2$, så $S^2 \setminus D$ er SO_3-paradoksal. Af lemma 5.5.1 følger det at $S^2 \setminus D \sim_{SO_3} S^2$, så sætning 5.4.4 giver at også S^2 er SO_3-paradoksal. $\square$

Bemærkning 5.5.3. *Vi har intet sted udnyttet, at S^2 har radius 1, så faktisk vil enhver sfære i $\mathbb{R}^3$ med centrum i origo være SO_3-paradoksal.*

Korollar 5.5.4 (Banach-Tarskis paradoks, version 2). *Enhver massiv kugle i $\mathbb{R}^3$ vil være G_3-paradoksal, hvor G_3 er den fulde isometrigruppe på $\mathbb{R}^3$.*

Bevis: Det må være nok at vise sætningen for kugler med centrum i origo, idet enhver kugle ved translation kan føres over i en sådan.

Lad derfor K være en massiv kugle med centrum i origo og rand S. Ifølge bemærkning 5.5.3 findes en paradoksal inddeling af S. Denne inddeling inducerer en inddeling af $K \setminus \{0\}$ ved at et punkt føres over i linjestykket fra origo og ud til punktet, altså ved korrespondancen $P \leftrightarrow \{tP | 0 < t \leq 1\}$. Dermed er altså $K \setminus \{0\}$ SO_3-paradoksal og dermed særligt G_3-paradoksal. Vi mangler altså blot at vise, at $K \sim_{G_3} K \setminus \{0\}$, for så giver sætning 5.4.4 at K er G_3-paradoksal.

Hvis vi lader r betegne radius for K, betragter vi punktet $P_0 = (0, 0, \frac{r}{2})$ og lader ℓ være en linje gennem P_0, der ikke skærer origo. Vi vælger nu et fast $\theta_0 \in [0, 2\pi] \setminus \{q\pi | q \in \mathbb{Q}\}$ og lader ρ være en rotation om ℓ med vinkel θ_0.

Sætter vi nu $D = \{\rho_n(0) | n \in \mathbb{N}_0\}$, får vi, da ρ pr. konstruktion har uendelig orden, at $\rho(D) = D \setminus \{0\}$. Men så må der gælde

$$K = (K \setminus D) \cup D \sim_{G_3} (K \setminus D) \cup \rho(D) = (K \setminus D) \cup (D \setminus \{0\}) = K \setminus \{0\},$$

hvoraf sætningen følger. $\square$

Afsluttende skal uden bevis nævnes følgende generalisering af version 2 af Banach-Tarskis paradoks, der kan vises nogenlunde simpelt udfra lidt videregående mængdelære:

Sætning 5.5.5. *Lad $A, B \in \mathbb{R}^3$ være begrænsede og begge med ikke-tomt indre. Da gælder $A \sim_{G_3} B$.*

Kapitel 6

Spilteori

Af Mads Kjærulf Caspersen og David Kyed

Vi vil i dette kapitel starte med, at give et bevis for Dutch Book Theorem, som kan fortolkes således: Sandsynlighedsregningen virker som et sikkerhedsnet, der sikrer os mod at tage ulogiske beslutninger i et givet spil. Senere vil vi give en kort introduktion til generel spilteori, ved at gennemgå teorien for to-personers nulsumspil. Inden vi kan give beviset for Dutch Book Theorem, må vi dog først gennemgå en smule teori om konvekse mængder. Alle de angivne sætninger, er hentet fra Arne Brønsteds 2OK-noter *Konveksitet.*

6.1 Konvekse mængder

Vi betragter i det følgende et endeligt dimensionalt hilbertrum H over $\mathbb{R}$.

Definition 6.1.1. *En delmængde $K \subseteq H$, siges at være konveks dersom:*

$$\forall x, y \in K \forall \mu \in [0,1]: \ \mu x + (1-\mu)y \in K$$

Definition 6.1.2. *Ved en konveks kombination af $x_1, \dots, x_n \in H$, forstås et element af formen $\sum_{i=1}^n \mu_i x_i$, hvor $\mu_i \geq 0$ og $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$.*
Ved det det konvekse hylster for $x_1, \dots, x_n$ forstås:

$$\operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \mid \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \mu_i = 1 \right\}.$$

Sætning 6.1.3. *Lad $x_1, \dots, x_n \in H$. Da er $\operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ både konveks og kompakt.*

Definition 6.1.4. *To konvekse mængder K_1 og K_2 siges at være separable, dersom der findes $y \in H$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ så:*

- $\langle x, y \rangle \geq \alpha$, $x \in K_1$.
- $\langle x, y \rangle < \alpha$, $x \in K_2$.

Eller hvis ovenstående to punkter gælder, med K_1 og K_2 ombyttet.

Sætning 6.1.5. *Lad K_1 og K_2 være konvekse disjunkte delmængder af H, og antag at K_1 er åben og K_2 er kompakt. Da er K_1 og K_2 separable, idet der findes $y \in H$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ så $\langle x, y \rangle \geq \alpha$ for $x \in K_2$ og $\langle x, y \rangle < \alpha$ for $x \in K_1$.*

6.2 Dutch Book Theorem

Vi betragter en endelig mængde $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, og det dertil hørende funktionsrum $\mathbb{R}^U$. Idet $|U| = n$ kan $\mathbb{R}^U$ identificeres med $\mathbb{R}^n$. Altså er $\mathbb{R}^U$ et hilbertrum med indre produkt givet ved $\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^n f(u_i)g(u_i)$.
Betragt en funktional $E : \mathbb{R}^U \to \mathbb{R}$. Ved Rieszs repræsentationssætning findes $g \in \mathbb{R}^U$ så $E(f) = \langle f, g\rangle$. Ved en tilstand på $\mathbb{R}^U$, forstås en funktional $E : \mathbb{R}^U \to \mathbb{R}$, så $E(\mathbf{1}) = 1$, hvor $\mathbf{1} : u \mapsto 1$. Det vil sige $\sum_{i=1}^n g(u_i) = 1$.

Vi forestiller os at elementerne i U repræsenterer de mulige udfald i et givet spil. I dette spil findes en bookmaker B, som har konstrueret en endelig mængde af gevinstfunktioner $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^U$. En gevinstfunktion f_λ skal angive nettogevinsten til et givet udfald. Det vil sige, at hvis spilleren A vælger at spille hos B efter gevinstfunktion f_λ, er

$$f_\lambda(u) = A \text{ 's tab/gevinst ved udfaldet } u \in U.$$

Lad os antage at A accepterer at spille på en delmængde af gevinstfunktionerne $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_0}$, hvor $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$. Spilleren A lader nu B fordele sine penge blandt spillene f_λ, hvor $\lambda \in \Lambda_0$. Spilleren A må derfor accepterer enhver konveks kombination af f_λ'erne, hvor $\lambda \in \Lambda_0$. Altså enhver kombination $\sum_{\lambda\in\Lambda_0} s_\lambda f_\lambda$, hvor $s_\lambda \geq 0$ og $\sum_{\lambda\in\Lambda_0} s_\lambda = 1$. For at realisere sagerne, tænker vi os følgende scenarie.

Hr. A tager på travbanen. Hr. A er sproglig student og relativt fattig. Han hæver sin pension på 6 kr. og mødes med bookmakeren Hr. B.
Der indgår tre heste h_1, h_2, h_3 i løbet . Udfaldsmængden U består altså af

$$U = \{\underbrace{h_1\text{vinder}}_{=u_1}, \underbrace{h_2\text{vinder}}_{=u_2}, \underbrace{h_3\text{vinder}}_{=u_3}\}$$

Vi lader f_1, f_2, f_3 være Hr. B's gevinstfunktioner givet ved

	u_1	u_2	u_3
f_1	9	−6	−6
f_2	−6	9	−6
f_3	−6	−6	9

Gevinstfunktioner f_λ angiver således at Hr. A vinder 9 kr. hvis h_λ vinder, og ellers taber Hr. A sine 6 kr.
Hr. A kan ikke se forskel på nogle af gevinstfunktionerne, og finder derfor alle tre acceptable. Det er nu Hr. B's tur til at fordele pengene på hestene og vælger at fordele de 6 kr. ligeligt på de tre væddemål f_1, f_2, f_3. Altså den konvekse kombination $\frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2 + \frac{1}{3}f_3$. Nu er Hr. A blevet narret, thi

$$\frac{1}{3}f_1(u_i) + \frac{1}{3}f_2(u_i) + \frac{1}{3}f_3(u_i) = -1 \qquad \text{for alle } i \in \{1, 2, 3\}$$

Det vil sige at Hr. A taber en krone, uanset hvilken hest der vinder. Et sådan væddemål, hvori Hr. A altid vil tabe penge, kaldes et Dutch Book. Hr. A spørger sig selv om han kunne have undgået dette, og efter fem år på Matematisk Institut finder han svaret i

Sætning 6.2.1 (Dutch Book Theorem). *For et fast valg af Λ_0 gælder: Enten er det muligt at konstruerer en konveks kombination*

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} s_\lambda f_\lambda \qquad \textit{hvor } s_\lambda \geq 0 \textit{ og } \sum_{\lambda \in \Lambda_0} s_\lambda = 1$$

så $f(u) < 0$ for alle $u \in U$, eller også findes der en tilstand E på $\mathbb{R}^U$ så $E(f_\lambda) \geq 0$ for alle $\lambda \in \Lambda_0$.

Før beviset for sætningen, vil vi betragte en konsekvens af denne, der kan hjælpe Hr. A. Vi betragter igen udfaldende $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, og forestiller os at spilleren A lægger en sandsynlighedsvektor $P = (p_1, \ldots, p_n)$ på U, hvor p_i angiver spillerens forventede sandsynlighed for at u_i forekommer. Det skal nu bemærkes at afbildningen $E_P(f) = \sum_{i=1}^n p_i f(u_i)$ udgør en tilstand på $\mathbb{R}^U$.
Hvis A nu vælger Λ_0 således at $E(f_\lambda) > 0$ for alle $\lambda \in \Lambda_0$, kan bookmakeren B ikke lave et Dutch Book på ham.

Vi vender nu tilbage til travbanen. Hr. A bemærker at h_1 hedder Lynet, h_2 hedder Speedy Weedy og h_3 hedder Flat Tyre. Derfor vælger han at tillæge dem sandsynligheden $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ (hhv.) for at vinde. Det vil sige at $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Altså fås

$$\begin{aligned}
E_P(f_1) &= \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot (-6) + 0 \cdot (-6) = \frac{3}{2} \geq 0 \\
E_P(f_2) &= \frac{1}{2} \cdot (-6) + \frac{1}{2} \cdot 9 + 0 \cdot (-6) = \frac{3}{2} \geq 0 \\
E_P(f_3) &= \frac{1}{2} \cdot (-6) + \frac{1}{2} \cdot (-6) + 0 \cdot 9 = -6 < 0
\end{aligned}$$

Følgeligt vælger Hr. A at accepterer gevinstfunktionerne f_1 og f_2. Det vil sige at $\Lambda_0 = \{1, 2\}$. Ved Dutch Book Theorem kan bookmakeren Hr. B ikke længere fordele pengene så Hr. A laver et Dutch Book.

Bevis for Dutch Book Theorem. Lad

$$K_1 = \{f \in \mathbb{R}^U \mid \forall u \in U : \ f(u) < 0\} \text{ og } K_2 = \operatorname{conv}\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}.$$

Det ses at K_1 og K_2 er konvekse mængder i $\mathbb{R}^U$. Idet λ_0 er endelig er K_2 kompakt og da $\mathbb{R}^U$ kan identificeres med $\mathbb{R}^n$ er K_1 åben.

Hvis $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, eksisterer der en konveks kombination $f = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} s_\lambda f_\lambda$, så $f(u) < 0$ for alle $u \in U$.

Hvis $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, findes der, ved Sætning 6.1.5, en funktion $g \in \mathbb{R}^U$ og et element $\alpha \in \mathbb{R}$, så $\langle f, g \rangle < \alpha$ for $f \in K_1$, og $\langle f, g \rangle \geq \alpha$ for $f \in K_2$.

Påstand 1: $\langle f, g \rangle \leq 0$ for alle $f \in K_1$.

Bevis. Antag at der findes $f \in K_1$ så $\langle f, g \rangle > 0$, og betragt afbildningen $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, givet ved $\psi(c) = \langle cf, g \rangle = c\langle f, g \rangle$. Afbildningen ψ er en ret linie med positiv hældning, og antager derfor vilkårligt store værdier. Specielt findes et $c_0 \in \mathbb{R}_+$ så $\psi(c_0) = \langle c_0 f, g \rangle > \alpha$. Men da $f \in K_1$ vil $c_0 f \in K_1$, hvilket er i modstrid med valget af g.

Påstand 2: Lad $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^U$ være givet ved $\mathbf{1}(u) = 1$. Da er $\langle \mathbf{1}, g \rangle > 0$.

Bevis. Bemærk at $\langle \mathbf{1}, g\rangle = \sum_{i=1}^{n} g(u_i)$. Vi viser først at $g(u_i) \geq 0$ for alle $i \in \{1,\ldots,n\}$. Antag at $g(u_{i_0}) < 0$ for et fast $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$, og sæt $\varepsilon = -g(u_{i_0}) > 0$. Definer afbildningen ζ ved

$$\zeta(u_i) = \begin{cases} -1 & , \quad i = i_0 \\ -1 & , \quad g(u_i) = 0 \\ \frac{-\varepsilon}{ng(u_i)} & , \quad \text{ellers} \end{cases}$$

Da fås

$$\langle \zeta, g\rangle = \sum_{i=1}^{n} \zeta(u_i) g(u_i) \geq \varepsilon - \frac{(n-1)\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{n} > 0$$

Hvilket er i modstid med påstand 1.
Der må da findes et i_1 så $g(u_{i_1}) > 0$, thi hvis $g(u_i) = 0$ for alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ er $\langle f, g\rangle = 0$ for alle $f \in \mathbb{R}^U$, hvilket er i modstrid med at g og α separerer K_1 og K_2. Altså er $0 < \sum_{i=1}^{n} g(u_i) = \langle \mathbf{1}, g\rangle$.

Ved påstand 2 er afbildningen $E : \mathbb{R}^U \to \mathbb{R}$ givet ved

$$E(f) = \frac{1}{\langle \mathbf{1}, g\rangle}\langle f, g\rangle$$

veldefineret. Det er klart at E er en tilstand på $\mathbb{R}^U$. Vi skal nu blot vise at $E(f_\lambda) \geq 0$ for alle $\lambda \in \Lambda_0$. Ved påstand 2 er det er nok at vise at $\langle f, g\rangle \geq 0$ for alle $f \in K_2$. Det er hertil nok at vise

$$\forall \varepsilon > 0 \exists f_\varepsilon \in K_1 : \ \langle f_\varepsilon, g\rangle \geq -\varepsilon.$$

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet, og betragt et vilkårligt, men fast, $f \in K_1$. Ved påstand 1 er $\langle f, g\rangle \leq 0$.

- Hvis $\langle f, g\rangle = 0$, er vi færdige, hvis vi sætter $f = f_\varepsilon$.
- Hvis $\langle f, g\rangle < 0$, kan vi vælge $f_\varepsilon = \frac{-\varepsilon}{\langle f, g\rangle} f$. Thi da er $\langle f_\varepsilon, g\rangle = -\varepsilon$.

Hermed er det ønskede vist. □

6.3 To-personers nulsumspil

Vi begynder med en formel definition af et spil.

Definition 6.3.1. *Ved et spil forstås:*

- *En mængde S af spillere, hvor $|S| \geq 2$.*
- *Til enhver spiller $A \in S$ er der knyttet en endelig mængde $\{a_1, \ldots, a_n\}$, hvis elementer kaldes A's* strategier.
- *En mængde U af udfald og en afbildning f, som til ethvert valg af stategier (en for hver spiller) knytter et element $u \in U$. Elementet u kaldes spillets resultat.*
- *En afbildning g, som til ethvert element $u \in U$ knytter et element $(t_s^u)_{s\in S} \in \mathbb{R}^S$. Tallet t_s^u kaldes spiller s gevinst ved resultatet u.*

I det følgende skal vi dog kun beskæftige os med spil, hvor $|S| = 2$. Vi betragter altså $S = \{A, B\}$, og vil ydermere antage at vektoren (t_A^u, t_B^u) opfylder at $t_A^u = -t_B^u$, for alle $u \in U$. Et spil som opfylder disse egenskaber, kaldes et to-personers nulsumspil (TNS).
Vi betragter nu et eksempel, hvor A har strategierne $\{a_1, a_2, a_3\}$ og B har strategierne $\{b_1, b_2\}$. Vi kan da repræsentere et spil, mellem A og B, ved følgende skema.

$A \setminus B$	b_1	b_2
a_1	$(2, -2)$	$(-3, 3)$
a_2	$(0, 0)$	$(2, -2)$
a_3	$(-5, 5)$	$(10, -10)$

Spiller f.eks. A strategien a_2 og B strategien b_2, vil A vinde to enheder, og B tabe to enheder. Da det angivne spil er et TNS, er det nok at angive A's gevinst. Altså kan spillet repræsenteres ved skemaet

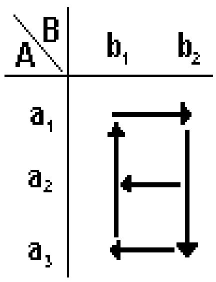
$A \setminus B$	b_1	b_2
a_1	2	-3
a_2	0	2
a_3	-5	10

(6.1)

som i det følgende vil blive omtalt som spillets matrix. I det følgende vil ofte blot definerer et spil ved dets matrix. Indgangene i matricen for et spil vil blive omtalt som gevinster. Når vi fremover omtaler et spil mellem A og B, vil vi altid repræsentere det, ved den matrix, der har A's gevinster som indgange.

Antagelse 1: Det antages, at spiller A til alle tider ønsker at maksimere t_A^u, og at spiller B til alle tider ønsker at minimere t_A^u. (Altså at begge spillere ønsker at vinde mest muligt.)

Betragt igen spillet (6.1). Hvis A vælger strategien a_3, og B gætter dette, bør B spille strategien b_1. Men hvis spiller A gætter, at B spiller b_1, vil A ændre sin strategi til a_1. Hvis B gætter dette, skifter B til b_2, osv. Disse strategiskift kan lettest overskues i skemaform. Et sådan skema kan ses i Figur 6.1.
Et sådan skema kaldes *pilediagrammet* for spillet.



Figur 6.1: Pilediagram for (6.1).

Definition 6.3.2. *Betragt et vilkårligt TNS. En strategi a siges at dominere en strategi a', dersom enhver gevinst ved a, er mindst lige så god, som den tilsvarende gevinst ved a'; og ydermere skal der findes mindst en gevinst ved a, som er effektivt bedre end den tilsvarende gevinst ved a'.*

Bemærk at egenskaben "god"skal forstås i hendhold til Antagelse 1. Som et eksempel på dominerende strategier, kan vi betragte:

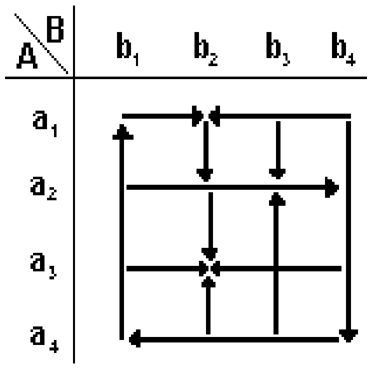
$A \setminus B$	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	12	-1	1	0
a_2	5	1	7	-20
a_3	3	2	4	3
a_4	-16	0	0	16

(6.2)

Her vil strategien b_2 dominerer b_3. Husk på at B jo ønsker at minimere gevinsterne.
I spillet (6.2) er strategiparret (a_3, b_2) interessant. Ved at tegne pilediagrammet for (6.2) vil man indse:

(i) Hvis A spiller a_3, er strategien b_2 den bedst mulige for B.

(ii) Hvis B spiller b_2, er strategien a_3 den bedst mulige for A.



Figur 6.2: Pilediagram for (6.2)

Altså kan det ikke betale sig for nogen af spillerne at skifte strategi, når først valget af strategipar (a_3, b_2) er indtruffet.
Et strategipar som (a_3, b_2) kaldes en *ligevægtstilstand*. Man ser at gevinsten hørende til (a_3, b_2) er mindst i sin række og størst i sin søjle. Generelt defineres

Definition 6.3.3. *En indgang t i matricen for et TNS siges at være et* saddelpunkt *dersom:*

1. t er mindre end eller lig enhver anden indgang i sin række.

2. t er større end eller lig enhver anden indgang i sin søjle.

Som et eksempel kan vi betragte nedenstående spil, hvor samtlige saddelpunkter er fremhævet

$A \setminus B$	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	4	**2**	5	**2**
a_2	2	1	-1	-20
a_3	3	**2**	4	**2**
a_4	-16	0	16	1

(6.3)

Det er værd at bemærke sig, at alle saddelpunkter har samme værdi. Dette gælder generelt

Sætning 6.3.4. *Betragt et TNS mellem spillerne A og B, med respektive strategimængder $\{a_1, \dots, a_n\}$ og $\{b_1, \dots, b_m\}$. Da vil alle saddelpunkter i spillet have samme værdi.*

Bevis: Lad a og b være saddelpunkter. Dersom a og b ligger i samme søjle eller række, er det klart at $a = b$. Antag nu at a og b hverken deler række eller søjle. I så fald udspænder a og b et rektangel i matricen for spillet. Lad c og d være de to resterende hjørner i dette rektangel.

$$\begin{array}{ccc} a & \cdots\cdots & c \\ \vdots & & \vdots \\ d & \cdots\cdots & b \end{array}$$

Vi får nu

1. Da a er minimalt i sin række, er $a \leq c$, og da b er maksimalt i sin søjle er $c \leq b$. Specielt er $a \leq b$.

2. Da a er maksimalt i sin søjle er $a \geq d$, og da b er minimalt i sin række er $d \geq b$. Specielt er $a \geq b$.

Af 1. og 2.følger det nu, at $a = b$. $\square$

Bemærkning 6.3.5. *Bemærk at indgangene c og d, fra beviset for Sætning 6.3.4 også vil være saddelpunkter.*

Ovenstående sætning retfærdiggør følgende

Antagelse 2: Dersom et TNS har et saddelpunkt, bør begge spillere vælge strategier som realiserer dette.

Vi betragter igen et TNS mellem A og B, som spiller efter de respektive strategier $\{a_1, \cdots, a_n\}$ og $\{b_1, \dots, b_m\}$. Elementerne i strategimængderne vil i det følgende blive omtalt som *rene strategier*. Vi antager nu at A vælger en sandsynlighedsvektor $P = (p_1, \dots, p_n)$, hvor p_i angiver sandsynligheden for A vælger at spille strategien a_i (for $1 \leq i \leq n$.) i et givet spil. Parret $(\{a_1, \dots, a_n\}, P)$ kaldes en *blandet strategi*.

Definition 6.3.6. *For ethvert gevinstsæt $g = \{t_1, \dots, t_k\}$ og enhver sandsynlighedsvektor $P = (p_1, \dots, p_k)$ defineres den* forventede værdi*, som $\sum_{j=1}^{k} t_j p_j$.*

Antagelse 3 Betragt et TNS mellem A og B. Antag at B spiller med en fast blandet strategi. For hvert valg af ren strategi for A, hører der en forventet værdi. Spiller A bør vælge den rene strategi, som giver størst forventet værdi.

Som eksempel på de indførte begreber, kan vi betragt følgende spil.

$A \setminus B$	b_1	b_2
a_1	2	-3
a_2	0	3

Lad os antage at B spiller den blandede strategi $(\{b_1, b_2\}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, og at A spiller med rene strategier. Da finder vi at

- Strategien a_1 giver forventet værdi: $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{1}{2}$
- Strategien a_2 giver forventet værdi: $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$

Altså bør A vælge at spille strategien a_2, idet A derved sikres et gennemsnitligt overskud på halvanden enhed. Dermed var $B's$ valg af blandet strategi ikke særligt godt. Spiller B ønsker derfor at vælge sin sandsynlighedsvektor (p_1, p_2), så A ikke kan drage fordel af at kende denne. Er dette muligt? Svaret er ja. For at indse dette betragtes et vilkårligt $x \in [0, 1]$. Antag at B spiller med den blandede strategi $(\{b_1, b_2\}, (x, 1 - x))$. Da bliver de forventede værdier for A's rene strategier:

- Forventet værdi for a_1: $2x + (1 - x)(-3) = -3 + 5x$
- forventet værdi for a_2: $0x + (1 - x)3 = 3 - 3x$

For at A ikke kan drage fordel af at kende til B's blandede strategi, skal altså $-3+5x = 3-3x$, dvs. $x = \frac{3}{4}$. Spiller B efter den blandede strategi $(\{b_1, b_2\}, (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}))$, vil A (uanset valg af ren strategi!) aldrig vinde mere end $2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot (-3) = \frac{3}{4}$ enheder i gennemsnit.
Vi kalder strategien $(\{b_1, b_2\}, (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}))$ for B's *optimale strategi.*

Hvis omvendt A ønsker at bestemme sig en optimal strategi, bliver de relevante ligninger:

- Forventet værdi for b_1: $2x + (1 - x)0 = 2x$
- Forventet værdi for b_2: $(-3)x + (1 - x)3 = 3 - 6x$

Løser vi $2x = 3 - 6x$, fås $x = \frac{3}{8}$. Dersom A spiller den blandede strategi $(\{a_1, a_2\}, (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}))$, er A sikret en gennemsnitlig gevinst på $\frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{5}{8} \cdot 0 = \frac{3}{4}$ enheder.
Man bemærker at den gennemsnitlige gevinst er den samme, hvadenten der spilles efter A's eller B's optimale strategi. Generelt gælder

Sætning 6.3.7. *Betragt et TNS mellem A og B. Da findes $v \in \mathbb{R}$ og optimale strategier for A og B, således at:*

1. *Hvis A spiller sin optimale strategi, er A's forventede gevinstværdi større en eller lig v, uanset hvilken (ren eller blandet) strategi B vælger.*
2. *Hvis B spiller sin optimale strategi, er A's forventede gevinstværdi mindre end eller lig v, uanset hvilken (ren eller blandet) strategi A vælger.*

Et par af rene eller blandede strategier som opfylder ovenstående mht. $v \in \mathbb{R}$, kaldes en løsning til spillet, og tallet v kaldes spillets værdi.

Sætningen angives uden bevis. For en retfærdiggørelse af sætningen, henvises der til *Game Theory and Strategy* af Philip D. Straffin.
Sætning 6.3.7 udtaler altså, at hvis A og B spiller de i sætningen nævnte strategier, kan det ikke betale sig for nogen af spillerne at ændre strategier. Der er m.a.o. tale om en ligevægtstilstand.

6.4 Fangernes problem

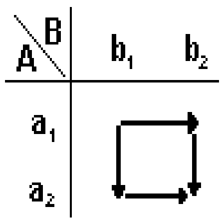
Som afrunding på Kapitlet vil vi kort omtale et topersoners ikke-nulsumsspil. Dette er kendt som *Fangernes problem.* Her møder vi to fanger, A og B, som er sat i forhør hver for sig. De er begge allerede i gang med at afsone straffe for tidligere begåede forbrydelser, men skal afhøres i forbindelse med en uopklaret forbrydelse. De har begge været med i den uopklarede forbrydelse, og kan derved sladre om hinanden. Straffelovgivningen i deres land er som følger:

- Hvis ingen af dem sladrer, går begge fri.
- Hvis A sladrer, og B ikke sladrer, får A et års strafnedsættelse og B får 2 års ekstra fængsel.
- Hvis B sladrer, og A ikke sladrer, får B et års strafnedsættelse og A får 2 års ekstra fængsel.
- Hvis de begge sladrer, får de hver et års ekstra fængsel.

I skemaform bliver dette:

$A \setminus B$	*tier*	*sladrer*
tier	$(0,0)$	$(-2,1)$
sladrer	$(1,2)$	$(-1,-1)$

Det interessante ved *Fangernes problem* er det tilhørende pilediagram. Fange A vil selvfølgeligt



Figur 6.3: Pilediagram for *Fangernes problem.*

prøve at forudse hvilken strategi B vælger. Men ligegyldigt hvilken af B's strategier han antager valgt, vil det bedst kunne betale sig at sladre. Det samme gælder for B. Dvs, hvis de begge spiller individuelt optimalt, kommer begge til at sidde et år i fængsel. Punktet $(-1,-1)$ er et eksempel på et såkaldt *ligevægtspunkt.*

Definition 6.4.1. *I et to-personers ikke-nulsumsspil defineres et* ligevægtspunkt*, som et punkt i pilediagrammet for spillet, som ikke har udafgående pile.*

Begrebet ligevægtspunkt i to-personers ikke-nulsumsspil, svarer til saddelpunkter i to-personers nulsumsspil.

Vi kan let overføre begreberne *blandede strategier* og *optimale strategier* til ikke-nulsumsspil. Den følgende sætning skyldes John Nash, og viser at Sætning 6.3.7 også gælder i ikke-nulsumsspil.

Sætning 6.4.2. *Betragt et vilkårligt to-personersspil. Da findes optimale strategier, for hver af de to spillere, således at det aldrig vil kunne betale sig at skifte væk fra disse.*

Gevinsten, hørende til de optimale strategier fra sætningen ovenfor, kaldes et *ligevægtspunkt*. Dette generaliserer blot Definition 6.4.1.
Sætning 6.4.2 angives uden bevis.
Ligevægte i to-personers nulsmumsspil kaldes ofte Nash-ligevægte. I *Fangernes problem* finder vi en Nash-ligevægt i $(-1, -1)$. Men det er oplagt, at begge fanger ville være bedre stillet, dersom ingen af dem sladrede. Altså har vi en situation, hvor begge spillere individuelt handler bedst muligt, og ender med et resultat, der ikke er optimalt for nogen parter. Dette fænomen, kaldes i spilteorien for et *ikke-Pareto-optimalt* ligevægtspunkt. For en mere dybdegående behandling af dette, henvises der til *Game Theory and Strategy* af Philip D. Straffin.

Litteratur

[Ber97] Christian Berg. *Topologi.* Forelæsningsnoter Mat3GT, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, 1997.

[Brø90] Arne Brøndsted. *Konveksitet.* Københavns universitet, Matematisk Institut, 1990.

[Cro95] Richard M. Crownover. *Introduction to fractals and chaos.* Jones and Bartlett, 1995.

[Fal90] Kenneth Falconer. *Fractal geometry.* John Wiley & Sons Ltd, 1990.

[Fra92] Jesper Frandsen. *Komplekse tal og fraktaler.* Systime, 1992.

[Gou96] Jean-Fraçois Gouyet. *Physics and Fractal Structures.* Masson, 1996.

[Har93] Peter Haremoös. *Tid og Betinget uafhængighed.* Roskilde Universitetscenter, 1993.

[Las94] René Cori & Daniel Lascar. *Logique mathématique II.* Masson, 1994.

[Man77] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature.* Freeman, 1977.

[Men97] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* Chapmann & Hall, fourth edition, 1997.

[Str93] Philip D. Straffin. *Game Theory and Strategi.* Mathematical Association of America, 1993.